

岩手県庁土木部 正員 水野久禎
 岩手大学工学部 正員 宮本裕
 北海道大学工学部 正員 佐藤浩一

1. ま え が き

著者らは、はりに関する種々の微分方程式を解くにあたり、境界積分方程式法(境界要素法ともいう)による解法を幅広く試みている。この方法は、一次元の境界要素法とも考えられる。この境界要素法は比較的小さなマトリックスを解けばよいので、小型計算機向きである。著者等はこれまでに、吊橋の撓度理論における基礎微分方程式に境界要素法を適用してきたが^{2) 3)}、今回は連続吊橋の計算例を作り、剛性マトリックス法による結果と一致したので発表する。

2. 解 析 理 論

図-1(a)に示す吊橋は、図-1(b)に示すはりと同価である。線形化撓度理論における微分方程式は式(1)で与えられる。また、ケーブル方程式は式(2)で与えられる。

$$EId^4w(x)/dx^4 - Hd^2w(x)/dx^2 - (p(x) + H_p y') = 0 \quad (1)$$

$$H_p l / EcAc + y'' \int_0^l w(x) dx = 0 \quad (2)$$

ただし、 $y' = -8f/l^2$, $H = H_g + H_p$ ($H_g = g l^2 / 8f$; 死荷重によるケーブル水平張力, $H_p = p l^2 / 8f$; 活荷重によるケーブル水平張力), $l_c = l(1 + 8f^2/l^2) + s_1/\cos^2 \gamma_1 + s_2/\cos^2 \gamma_2$ であり、式(2)において連続吊橋では積分の範囲は l の代りに全長 L とする。

いま基本解 $w^*(x, \xi)$ を式(3)の解として定義する。

$$EId^4w^*(x, \xi)/dx^4 - Hd^2w^*(x, \xi)/dx^2 = \delta(x, \xi) \quad (3)$$

ここで、 δ はデルタ関数である。式(1)の両辺に基本解 $w^*(x, \xi)$ をかけ、はりのスパン l にわたって積分する。

$$\int_0^l [EId^4w(x)/dx^4 - Hd^2w(x)/dx^2 - p(x) - H_p y'] w^*(x, \xi) dx = 0 \quad (4)$$

式(4)の $w(x)$ の微係数がとれるまで部分積分を繰り返し、式(5)を得る。

$$\left[-Q(x)w^*(x, \xi) + M(x)\theta^*(x, \xi) - \theta(x)M^*(x, \xi) + w(x)Q^*(x, \xi) \right]_{x=0}^{x=l} + \int_0^l w(x) [EId^4w^*(x, \xi)/dx^4 - Hd^2w^*(x, \xi)/dx^2] dx = \int_0^l [p(x) + H_p y'] w^*(x, \xi) dx \quad (5)$$

ただし、 $\theta(x) = dw(x)/dx$, $M(x) = -EId^2w(x)/dx^2$, $Q(x) = -EId^3w(x)/dx^3 + Hdw/dx$

$\theta^*(x, \xi) = dw^*(x, \xi)/dx$, $M^*(x, \xi) = -EId^2w^*(x, \xi)/dx^2$, $Q^*(x, \xi) = -EId^3w^*(x, \xi)/dx^3 + Hdw^*(x, \xi)/dx$

ここで式(5)に式(3)を代入し、デルタ関数の性質を考慮すれば、式(6)が得られる。

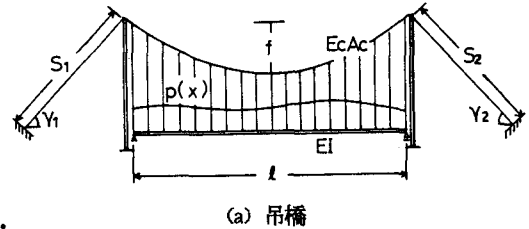
$$w(\xi) = \left[Q(x)w^*(x, \xi) - M(x)\theta^*(x, \xi) + \theta(x)M^*(x, \xi) - w(x)Q^*(x, \xi) \right]_{x=0}^{x=l} + \int_0^l [p(x) + H_p y'] w^*(x, \xi) dx \quad (6)$$

また式(6)を ξ について微分して

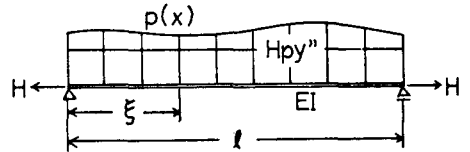
$$\theta(\xi) = \left[Q(x)\hat{w}^*(x, \xi) - M(x)\hat{\theta}^*(x, \xi) + \theta(x)\hat{M}^*(x, \xi) - w(x)\hat{Q}^*(x, \xi) \right]_{x=0}^{x=l} + \int_0^l [p(x) + H_p y'] \hat{w}^*(x, \xi) dx \quad (7)$$

ただし、 $\hat{w}^*(x, \xi) = dw^*(x, \xi)/d\xi$, $\hat{\theta}^*(x, \xi) = d\theta^*(x, \xi)/d\xi$, $\hat{M}^*(x, \xi) = dM^*(x, \xi)/d\xi$, $\hat{Q}^*(x, \xi) = dQ^*(x, \xi)/d\xi$

式(5), (6)において、 $\xi = \varepsilon$, $\xi = l - \varepsilon$ (ε は微小な正定数)としたときの $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を考えることにより、境界における4本の方程式、式(8)が得られる。



(a) 吊橋



(b) 張力と分布力を受けるはり

図-1

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} w^*(\ell, 0) & -\theta^*(\ell, 0) & M^*(\ell, 0) & -Q^*(\ell, 0) \\ w^*(\ell, \ell) & -\theta^*(\ell, \ell) & M^*(\ell, \ell) & -Q^*(\ell, \ell)-1 \\ \tilde{w}^*(\ell, 0) & -\tilde{\theta}^*(\ell, 0) & \tilde{M}^*(\ell, 0) & -\tilde{Q}^*(\ell, 0) \\ \tilde{w}^*(\ell, \ell) & -\tilde{\theta}^*(\ell, \ell) & \tilde{M}^*(\ell, \ell)-1 & -\tilde{Q}^*(\ell, \ell) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(\ell) \\ M(\ell) \\ \theta(\ell) \\ w(\ell) \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} -w^*(0, 0) & \theta^*(0, 0) & -M^*(0, 0) & Q^*(0, 0)-1 \\ -w^*(0, \ell) & \theta^*(0, \ell) & -M^*(0, \ell) & Q^*(0, \ell) \\ -\tilde{w}^*(0, 0) & \tilde{\theta}^*(0, 0) & -\tilde{M}^*(0, 0)-1 & \tilde{Q}^*(0, 0) \\ -\tilde{w}^*(0, \ell) & \tilde{\theta}^*(0, \ell) & -\tilde{M}^*(0, \ell) & \tilde{Q}^*(0, \ell) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(0) \\ M(0) \\ \theta(0) \\ w(0) \end{bmatrix} \\
 & = -\{H_1 \ H_2 \ H_3 \ H_4\}^T \dots\dots\dots (8)
 \end{aligned}$$

ここで、基本解は以下ようになる。（基本解はLaplace変換やFourier変換で求めることができる。²⁾）

$$w^*(x, \xi) = (\sinh \lambda r / \lambda^3 - r / \lambda^2) / 2EI, \quad \theta^*(x, \xi) = (\cosh \lambda r / \lambda^2 - 1 / \lambda) / 2EI \cdot \text{sgn}(x, \xi)$$

$$M^*(x, \xi) = -(\sinh \lambda r / \lambda) / 2, \quad Q^*(x, \xi) = -1 / 2 \cdot \text{sgn}(x, \xi)$$

$$\tilde{w}^*(x, \xi) = -(\cosh \lambda r / \lambda^2 - 1 / \lambda^2) / 2EI \cdot \text{sgn}(x, \xi), \quad \tilde{\theta}^*(x, \xi) = -(\sinh \lambda r / \lambda) / 2EI$$

$$\tilde{M}^*(x, \xi) = \cosh \lambda r / 2 \cdot \text{sgn}(x, \xi), \quad \tilde{Q}^*(x, \xi) = 0$$

ただし、 $r = |x - \xi|$ 、 $x > \xi$ のとき $\text{sgn}(x, \xi) = 1$ 、 $x < \xi$ のとき $\text{sgn}(x, \xi) = -1$ 、 $\lambda^2 = H/EI$

単純吊橋では式(8)の8個の境界量のうち、4個については境界条件より定まり、これにより残り4個の未知量は導かれる。連続吊橋では各径間ごとに式(8)を作り、さらに中間支点における連続条件式を加えた連立方程式（境界量方程式）を解けばよい。なお参考文献2では、式(8)から剛性マトリックスの誘導をした。計算の手続きは連続吊橋では、まず活荷重 p による H_p を仮定し

（それに対応する λ を計算して）、上記の境界量方程式を解いて、境界量（支点の変位と力）を計算する。それらの数値を使って、式(2)により H_p を求める。その際、仮定された H_p と上記の連立方程式より求めた H_p が一致するまで、繰り返し計算を行なう。これらの計算の手続きを説明したのが図-2である。

例として図-3において、等分布活荷重 p の載った場合を考える。

$\ell_1 = 178\text{m}$ 、 $\ell_2 = 712\text{m}$ 、 $I = 1.9512\text{m}^4$ 、 $E = 2.1 \times 10^7 \text{t/m}^2$ ($2.06 \times 10^8 \text{KN/m}^2$)、 $E_c = 2.0 \times 10^7 \text{t/m}^2$ 、 $A_c = 0.2796\text{m}^2$ 、 $L_c = 1136.28\text{m}$ 、 $f_1 = 4.45\text{m}$ 、 $f_2 = 71.2\text{m}$ 、活荷重 $p = 2.46\text{t/m}$ 、死荷重 $g = 12.651\text{t/m}$ とすると、 $H_p = 1989.1\text{t}$ 、 $H = 13248.1\text{t}$ 、 $\lambda = 0.017981\text{m}^{-1}$ となり式(6)からはたわみ w を、さらに式(7)をもう一度まで微分した式からは曲げモーメント M をそれぞれ計算することができる。すなわち $w_{x=L/2} = 0.83589\text{m}$ (0.83590m)、 $M_{x=L/2} = 685.51\text{tm}$ (685.52tm) となる。かつこの数値は剛性マトリックス法によるものである。剛性マトリックス法では節点数の2倍の大きさの連立方程式を解くのにくらべ（30節点なら約60元連立方程式となる）、本方法では3径間吊橋の場合16元連立方程式を解けばよいのでマイコン（パソコン）でも計算することができるのが利点である。

参考文献 1. 佐藤浩一・渡辺昇・大島久：ステップ関数を用いた連続吊橋の剛性マトリックス解法，第32回年次学術講演会講演概要，1977年10月 2. 宮本裕・岩崎正二・出戸秀明・小野寺英二：境界積分方程式による吊橋の撓度理論解法について，境界要素法論文集第2巻，境界要素法研究会，1985年8月 3. 宮本裕・岩崎正二・渡辺昇：境界要素法による吊橋の撓度理論解析について，第40回年次学術講演会講演概要，1985年9月

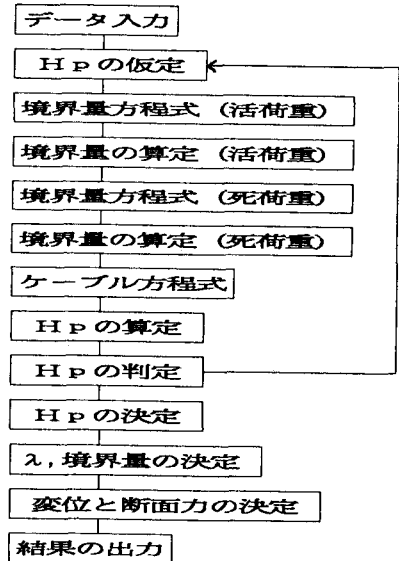


図-2 計算の手順

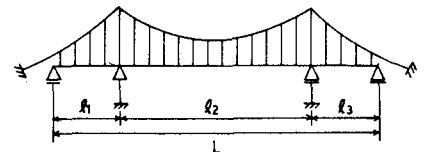


図-3 連続吊橋