Ⅰ-28　境界要素法による２次元弾性問題の最小重量設計について

岩手大学工学部　正員　宮本　裕
室蘭工業大学　正員　杉本博之
岩手大学工学部　正員　岩崎正二

１．まえがき

近年、積分方程式と有限要素法（ＦＥＭ）で行なわれる離散化手法を組み合わせた境界要素法（Boundary Element Method，以下 ＢＥＭと略す）と呼ばれる解析方法が、マイコンの発達とともに工学的問題に適用されてきている。ＢＥＭは積分方程式を使ってもとのモデルよりもひとつ次元の少ないモデルを計算するので、入力データが少なく、あつかう方程式の元数も少なく、したがって計算時間は短いという利点がある。一方これまで最適設計における構造解析の手法としては、ＦＥＭが多く用いられてきたが、ＦＥＭのかわりにＢＥＭを用いると、入力データがより少なくてすみ、かつ形状最適化の繰り返し段階における構造解析の計算時間の短縮化など利点が多い。　本報告ではこれまでの著者らの作成してきたプログラムにさらに改良を加えたものに[2)]、著者の中の杉本らが開発した汎用最適設計プログラムとを結びつけて、２次元弾性問題の最小重量設計のプログラムを作ったので、計算例と合せて発表するものである。なお、２次元弾性体の形状最適化に関しては、他に尾田[3)]、長谷川[4)5)]らの研究がある。

２．解析理論

２次元弾性問題におけるＢＥＭの基礎関係式は、相反法則などで次式のように示される。

$$c^i u^i_l + \int_\Gamma u_k p^*_{lk}\, d\Gamma = \int_\Gamma p_k u^*_{lk}\, d\Gamma + \int_\Omega b_k u^*_{lk}\, d\Omega \qquad (k=1,\ 2\quad \ell=1,\ 2) \qquad (1)$$

ここで、u_k，p_k およびb_k は、それぞれk方向の変位、応力度および物体力であり、u^i_l は点ｉにおけるℓ方向の変位であり、c^iは点ｉにおける境界の状態を示す係数である。またu^*_{lk}，p^*_{lk} はそれぞれℓ方向に作用する単位力により生じたk方向の変位と応力ベクトルである。これは基本解と呼ばれるもので、平面ひずみの場合は次式で示される。

$$u^*_{lk} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)}\left\{(3-4\nu)\ln\left(\frac{1}{r}\right)\Delta_{lk} + \frac{\partial r}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_k}\right\} \qquad (2)$$

$$p^*_{lk} = \frac{-1}{4\pi G(1-\nu)\, r}\left[\frac{\partial r}{\partial n}\left\{(1-2\nu)\Delta_{lk} + 2\frac{\partial r}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_l}\right\} - (1-2\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_l}n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k}n_l\right)\right] \qquad (3)$$

ただし、nは物体表面の法線、n_j は方向余弦、Δ_{lk} は Kronecker のデルタ、rは負荷点と考慮点との距離、νはポアソン比 、Gはせん断弾性係数である。　式（2）、（3）を式（1）に代入して、各項を計算すると、式（4）になる。ただし、$[u^*]$はu^*_{lk} を成分としてもつ（2ｘ2）のマトリッマスであり、$[p^*]$も同様である。

$$[c^i]\{u^i\} + \int_\Gamma [p^*]\{u\}\, d\Gamma = \int_\Gamma [u^*]\{p\}\, d\Gamma + \int_\Omega [u^*]\{b\}\, d\Omega \qquad (4)$$

さらに$\{u\}$と$\{p\}$は線形要素を仮定した場合、$\{u\} = [\Phi]^T\{u_j\}$、$\{p\} = [\Phi]^T\{p_j\}$と表わされる。なお$[\Phi]^T$は内挿関数と呼ばれるものである。　式（4）をｎ個の線形要素について考えると次式のようになる。

$$[c^i]\{u^i\} + \sum_{j=1}^{n}\left\{\int_\Gamma [p^*][\Phi]^T d\Gamma\right\}\{u_j\} = \sum_{j=1}^{n}\left\{\int_\Gamma [u^*][\Phi]^T d\Gamma\right\}\{p_j\} + \sum_{s=1}^{m}\left\{\int_\Omega [u^*]\{b\}\, d\Omega\right\} \qquad (5)$$

式（5）に Gauss の数値積分公式を用いて展開すると式（6）となる。なお実際の数値積分では、境界において Gauss の４点積分公式,内部領域においては Gauss の三角形要素における５次７点積分公式を用いた。

$$[c^i]\{u^i\} + \sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{q}|G|_j w_k\left([p^*][\Phi]^T\right)_k\right\}\{u_j\}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{q}|G|_j w_k\left([u^*][\Phi]^T\right)_k\right\}\{p_j\} + \sum_{s=1}^{m}\left\{\sum_{t=1}^{e}|J|_s w_t\left([u^*]\{b\}\right)_t\right\} \qquad (6)$$

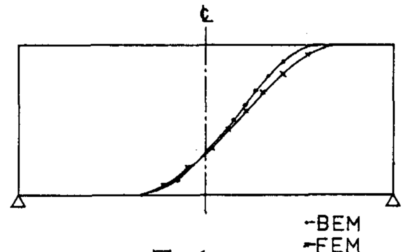
ここで $|G|_j=\sqrt{\ell_j}/2$、ℓ_jは境界要素Γ_jの長さ、$|J|_s$は領域要素Ω_sの面積である。またmは領域Ωを三角要素に分割した際の分割数であり、qおよびeは積分点の個数である。w_k、w_tは積分点での重み係数であり、$([p^*][\Phi]^T)_k$、$([u^*][\Phi]^T)_k$および$([u^*]\{b\})_t$は積分点におけるそれぞれの関数値である。さらに式（6）はある特定な点ｉ（考慮点）と、その他の要素Γ_jとの関係式であるので、式（6）を境界上のすべての節点ｎ について考えると結局 ２ｎ個の方程式が得られる。よって式（6）は次式のように表わされる。

$$[H]\{u\}=[G]\{p\}+\{B\} \qquad (7)$$

式（7）を未知反力と未知変位について解き、この変位を内点の応力および表面応力を計算する式に代入して、内点の応力および表面応力を計算する。詳細は紙面の都合で省略する。

３．最適設計

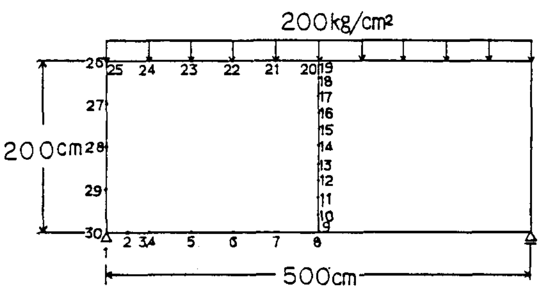
最適設計は、問題に応じて種々の定式化が考えられるが、規定の荷重条件下で、その挙動、形状、その他の特性に関する制約（制約条件）を満足し、構造物の良否を判定する量（目的関数）を最小とする構造物の諸元（設計変数）を決定することであるとも定義できる。本研究では、目的関数に連続体の面積、制約条件は、von Mises の相当応力が降伏応力以下であるという条件、設計変数は、形状最適化を考慮する自由面を多項式近似し、その多項式の係数とした。この最適化問題を解く非線形計画法は、最適化に改良された可能方向法を用いる逐次２次計画法（ＳＱＰ）[6]を用いた。



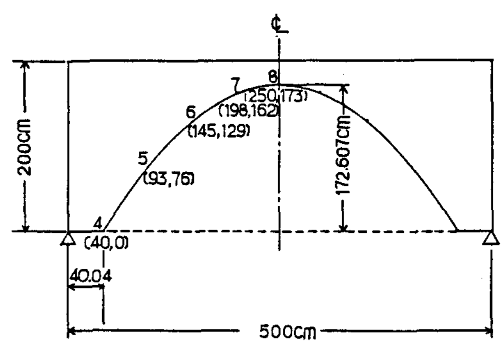
図－１

４．数値計算例

図－２のようなモデルについて、ＢＥＭとＦＥＭによる桁中央でのσ_xの計算結果の比較は図－１のようになり、最小重量設計の計算結果は、図－３のようになった。なお鋼種はＳＭ５０（降伏点応力 3200kg/cm²）$E=2.1\times10^6$kg/cm², $\nu=0.3$で平面応力とした。



図－２



図－３

参考文献　１．佐々木一彦・宮本裕・岩崎正二：物体力を考慮した境界要素法による二次元弾性問題の解法，第４０回年次学術講演会講演概要，1985年 9月　２．三浦登・宮本裕・渡辺昇：２重節点による２次元弾性問題の境界要素法解析について，第４１回年次学術講演会講演概要，1986年11月　３．尾田十八：機械構造の形状設計と材料設計問題における最適化の方法論について，材料システム,第３巻，1984年7月　４．長谷川明：連続構造の形状最適化に関する２，３の考察，第３９回年次学術講演会講演概，1984年10月　５．長谷川明：変位制約と応力制約を受ける連続構造の形状改訂方法について，第４０回年次学術講演会講演概要，1985年9月　６．Vanderplaats, G.N.: Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1984