

函館工業高等専門学校 正員 三浦 登
 岩手大学工学部 正員 宮本 裕
 北海道大学工学部 正員 渡辺 昇

1. ま え が き

近年、積分方程式と有限要素法(FEM)で行なわれる離散化手法を組み合わせた境界要素法(Boundary Element Method, 以下BEMと略す)と呼ばれる解析方法が、マイコンの発達とともに工学的問題に適用されてきている。BEMは積分方程式を使ってもとのモデルよりもひとつ次元の少ないモデルを計算するので、入力データが少なく、あつかう方程式の元数も少なく、したがって計算時間は短いという利点がある。本報告の理論によるプログラムは次のような特徴がある。①要素内の変位・応力は線形関数に従って変化する。②自重などの物体力を考慮できる。③応力の急変するかど点に2重節点を用いて、計算精度を上げている。④内点の応力のほかに表面力の応力も計算する。⑤境界面が複数の場合にも適用できる。なおFEMの複合構造解析プログラム(ISAP-6)で結果の妥当性を確認した。

2. 解 析 理 論

2次元弾性問題におけるBEMの基礎関係式は、相反法則などで次式のように示される。

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u_k p_{ik} d\Gamma = \int_{\Gamma} p_k u_{ik} d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_{ik} d\Omega \quad (k=1, 2 \quad i=1, 2) \quad (1)$$

ここで、 u_k , p_k および b_k は、それぞれ k 方向の変位、応力度および物体力であり、 u_i は点 i における i 方向の変位であり、 c_i は点 i における境界の状態を示す係数である。また u_{ik} , p_{ik} はそれぞれ i 方向に作用する単位力により生じた k 方向の変位と応力ベクトルである。これは基本解と呼ばれるもので、平面ひずみの場合は次式で示される。

$$u_{ik} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln \left(\frac{1}{r} \right) \Delta_{ik} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_k} \right\} \quad (2)$$

$$p_{ik} = \frac{-1}{4\pi G(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu) \Delta_{ik} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} \right\} - (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_i \right) \right] \quad (3)$$

ただし、 n は物体表面の法線、 n_i は方向余弦、 Δ_{ik} は Kronecker のデルタ、 r は負荷点と考慮点との距離、 ν はポアソン比、 G はせん断弾性係数である。式(2)、(3)を式(1)に代入して、各項を計算すると、式(4)になる。ただし、 $\{u^*\}$ は u_{ik} を成分としてもつ (2×2) のマトリックスであり、 $\{p^*\}$ も同様である。

$$\{c_i\} \{u\} + \int_{\Gamma} \{p^*\} \{u\} d\Gamma = \int_{\Gamma} \{u^*\} \{p\} d\Gamma + \int_{\Omega} \{u^*\} \{b\} d\Omega \quad (4)$$

さらに $\{u\}$ と $\{p\}$ は線形要素を仮定した場合、 $\{u\} = [\Phi]^T \{u_j\}$ 、 $\{p\} = [\Phi]^T \{p_j\}$ と表わされる。なお $[\Phi]^T$ は内挿関数と呼ばれるもので、一定要素の場合は不要である。そこで以上の点を考慮して式(4)を n 個の線形要素について考えると次式ようになる。

$$\{c_i\} \{u\} + \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Gamma} \{p^*\} [\Phi]^T d\Gamma \right\} \{u_j\} = \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Gamma} \{u^*\} [\Phi]^T d\Gamma \right\} \{p_j\} + \sum_{s=1}^m \left\{ \int_{\Omega} \{u^*\} \{b\} d\Omega \right\} \quad (5)$$

式(5)に Gauss の数値積分公式を用いて展開すると式(6)となる。なお実際の数値積分では、境界において Gauss の4点積分公式、内部領域においては Gauss の三角形要素における5次7点積分公式を用いた。

$$\begin{aligned} & \{c_i\} \{u\} + \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^q |G|_j w_k ([p^*] [\Phi]^T)_k \right\} \{u_j\} \\ & = \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^q |G|_j w_k ([u^*] [\Phi]^T)_k \right\} \{p_j\} + \sum_{s=1}^m \left\{ \sum_{t=1}^q |J|_s w_t ([u^*] \{b\})_t \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで $|G|_j = \sqrt{\ell_j}/2$ 、 ℓ_j は境界要素 Γ_j の長さ、 $|J|_s$ は領域要素 Ω_s の面積である。また m は領域 Ω を三角要素に分割した際の分割数であり、 q および e は積分点の個数である。 w_k 、 w_t は積分点での重み係数であり、

$([p^*][\Phi])_k$ 、 $([u^*][\Phi])_k$ および $([u^*]\{b\})_t$ は積分点におけるそれぞれの関数値である。

さらに式 (6) はある特定な点 i (考慮点) と、その他の要素 Γ_j との関係式であるので、式 (6) を境界上のすべての節点 n について考えると結局 $2n$ 個の方程式が得られる。よって式 (6) は次式のように表わされる。

$$[H]\{u\} = [G]\{p\} + \{B\} \quad \text{----- (7)}$$

なおここで、かど点の計算に用いる 2 重節点のあつかいについて説明すると次のようになる。図-1 のような矩形モデルの場合、節点②、①は同じかど点であるが、それぞれ異なる応力を分担するため 2 つの節点番号をもつ。ただし変位は等しい。同様に節点③、④も同様に同じかど点にもうけた 2 つの節点であり、それぞれ異なる応力をもつが変位は等しい。式 (7) の $[H]$ 、 $[G]$ はある点と他の点の間の応力と変位から決まる量であるが、一般の境界要素法では、この $[H]$ 、 $[G]$ をすべての点について考えるが、この 2 重節点の場合はたとえば節点③と④の間の $[H]$ 、 $[G]$ は計算しない。(実際は同じ点であるから) 節点①と③の間の $[H]$ 、 $[G]$ は計算する。節点①と④の間の $[H]$ 、 $[G]$ も計算する。プログラム上の作業が多少煩雑になるが、原理は簡単である。1)

式 (7) を未知反力と未知変位について解き、この変位を内点の応力および表面応力を計算する式に代入して、内点の応力と表面応力を計算する。詳細は紙面の都合で省略する。

3. 数値計算例

図-2 のような三角形分布荷重を受ける擁壁について、底面での応力を考える。

図の BEM の Linear element による数値は文献 2) によるものである。

$G = 9.45 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ ($9.26 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$)、 $\nu = 0.1$ 、 $Q = 180 \text{ kg/cm}$ (1760 N/cm)

$H = 180 \text{ cm}$ 、 $B = 60 \text{ cm}$ 、単位体積重量 $W = 2.4 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ ($2.35 \times 10^{-2} \text{ N/cm}^3$) である。

なお (b) の内部要素は式 (7) の最後の項の計算のために必要で、FEM と違い

未知数を考える必要がないことに注意する。

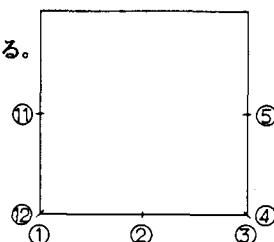
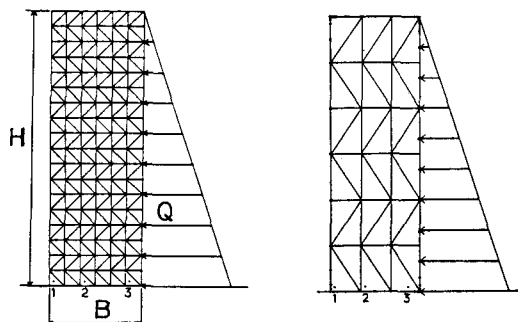


図-1



(a) ISAP-6

(b) BEM

番号	応力	ISAP-6	LINEAR	LINEAR (二重点)
1	σ_{11}	-0.21405	-0.07993	-0.09824
	σ_{22}	-1.92640	-1.81677	-1.81446
	σ_{12}	-0.34927	-0.22481	-0.22562
2	σ_{11}	-0.08977	-0.07473	-0.07465
	σ_{22}	-0.80796	-0.68721	-0.68678
	σ_{12}	-0.33896	-0.27119	-0.26998
3	σ_{11}	-0.04709	0.00973	0.01820
	σ_{22}	0.42385	0.66814	0.66644
	σ_{12}	-0.39997	-0.29741	-0.29540

(c) 計算結果 (単位: kg/cm^2)

図-2

4. 模型実験

この理論と計算の妥当性を確認するために模型実験を行ったが、詳細は当日発表する予定である。

なお、計算には北大、東北大、東大の大型計算機センターを利用した。

参考文献

1. Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C.: Boundary Element Techniques, Theory and

Applications in Engineering, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1984: 邦訳 田中正隆, 境界要素法解析

—理論と応用, 培風館 1984 年

2. 佐々木一彦・宮本裕・岩崎正二: 物体力を考慮した境界要素法による

二次元弾性問題の解法, 第 40 回年次学術講演会講演概要, 1985 年 9 月

3. 宮本裕・岩崎正二・本郷雅俊・角

田宏一: 2 重節点を用いた境界要素法による 2 次元弾性問題の解法, 東北支部技術研究発表会講演概要, 1986 年 3 月