

信州大学 学生会員 荒川 宗二
 " 正会員 草間 孝志
 " 正会員 大上 俊之

1. まえがき 境界要素法を用いて、曲線境界をもつ構造物を解析する場合、境界形状をできるだけ忠実に表現することによって、解の精度の向上を図ることができる。内挿関数としては一般に多項式が用いられている。一方、形の表現に有限フーリエ変換を用いる方法がある¹⁾。本報告は2次元境界要素法に有限フーリエ級数を応用する方法について述べ、数値計算例によりその有効性を検討したものである。

2. 境界形状の有限フーリエ近似 境界上のある要素が0からnまでのn+1個の節点を含んでいるものとし、要素内の節点jの座標を (x_j, y_j) とする。いま、節点間ベクトルを式(1)で定義すると、 x_j, y_j は式(2)で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u_j &= x_{j+1} - x_j \\ v_j &= y_{j+1} - y_j \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

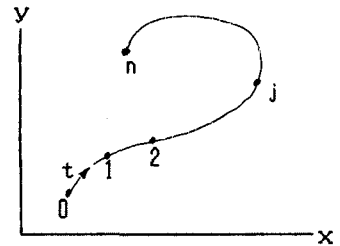


図-1 曲線要素

$$x_j = x_0 + \sum_{r=0}^{j-1} u_r, \quad y_j = y_0 + \sum_{r=0}^{j-1} v_r \quad (j=1, 2, 3, \dots, n) \quad (2)$$

ここで、ベクトルのx成分 u_j を有限フーリエ級数で表現すると、nが偶数の場合

$$u_j = \frac{A_{x0}}{2} + \sum_{k=1}^{n/2-1} \left[A_{xk} \cos\left(\frac{2\pi k j}{n}\right) + B_{xk} \sin\left(\frac{2\pi k j}{n}\right) \right] + \frac{A_{xn/2}}{2} \cos(\pi j) \quad (3)$$

ここに、

$$A_{xk} = \frac{2}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} [u_j \cos\left(\frac{2\pi k j}{n}\right)] \quad (k=0 \sim n/2), \quad B_{xk} = \frac{2}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} [u_j \sin\left(\frac{2\pi k j}{n}\right)] \quad (k=1 \sim n/2-1) \quad (4)$$

である。A, Bの第1添字xはx成分uに関するフーリエ係数であることを示す。vについても同様にして求められる。式(2), (3), (4)より x_j を求め、離散値 x_j を連続な $x(t)$ になおすと次式を得る。

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{A_{x0}}{2} t + \frac{A_{xn/2}}{4} [1 - \cos(\pi t)] \\ &+ \sum_{k=1}^{n/2-1} \left[\frac{\sin(t \lambda_k)}{\sin \lambda_k} \left[A_{xk} \cdot \cos[(t-1) \lambda_k] + B_{xk} \cdot \sin[(t-1) \lambda_k] \right] \right] \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、 $\lambda_k = \pi k / n$ である。また、 A_{xk}, B_{xk} は次のようになる。nが奇数のときも同様である。

$$\left. \begin{aligned} A_{xk} &= \frac{2}{n} \left[-x_0 + x_n \cdot \cos(2\lambda_k) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \left[\{ \sin[(2j-1) \lambda_k] \cdot \sin \lambda_k \} x_j \right] \right] \\ B_{xk} &= \frac{2}{n} \left[-x_n \cdot \sin(2\lambda_k) - 2 \sum_{j=1}^{n-1} \left[\{ \cos[(2j-1) \lambda_k] \cdot \sin \lambda_k \} x_j \right] \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

3. 内挿関数 $\{\Phi\}^T$ を内挿関数とすると, 式(5), (6) より $\{\Phi\}^T$ の要素 Φ_j は n が偶数の場合には次のようになる。

$$\Phi_0 = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} - t - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin[(2t-1)\lambda_k]}{\sin\lambda_k} \right] + \frac{\cos(t\pi)}{2n} + \frac{1}{2}$$

$$\Phi_j = \frac{\sin[(n-1)\zeta]}{n \cdot \sin\zeta} + \frac{\cos(n\zeta)}{n} \quad (1 \leq j \leq n-1)$$

$$\Phi_n = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} + t + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin[(2t+1)\lambda_k]}{\sin\lambda_k} \right] + \frac{\cos(t\pi)}{2n} - \frac{1}{2}$$

ここに, $N=n/2$ である。図-2, 3 は Φ_j の一例である。

4. 数値計算例 境界要素法に適用する前に次の簡単な計算を行った。図-4 は $(0, -0.5), (1, 0), (0, 0.5), (-1, 0)$ の4点を通る閉曲線。内挿関数を用いると楕円になる。境界を Γ とすると曲線長は

$$S = \int_{\Gamma} d\Gamma = \int_0^n |J| dt, \quad |J| = \text{ヤコビアン}$$

で与えられる。節点間に分点数4のガウスルジャンドルの積分公式を適用すると, $S=4.84446$ を得る。第2種完全楕円積分による正解値は4.84426 である。次に, 内圧をうける厚肉円筒の境界要素法による解法に適用し, 線形要素の解と比較した。

図-5 に線形要素とF要素(フーリエ級数要素)の要素分割を示す。数値積分の条件をできるだけ同じにするため, 両者とも(節点間の数) $\times$ (分点数) = 192 とした。連立方程式は線形要素では96元, F要素では32元になる。計算結果を図-6 と図-7 に示す。図-6 は r 方向の変位, 図-7 は σ_{θ} の分布を図示したものである。図には厳密解を実線で示した。F要素の場合には, 境界近くの内部点の値もよく一致していることがわかる。

5. あとがき 簡単な計算例ではあったが, 妥当性が検証された。内挿関数を有限フーリエ級数で表現することにより一種の高次要素とみなされるので, 解の精度を高めることが期待できる。

参考文献 1) 上坂: かたちのスペクトル分析

, 数理科学, サイエンス社, 1983. 2) 大上, 三井, 草間: 境界要素法の移動境界問題への適用, 境界要素法論文集, 第2巻, 1985. 3) 草間, 大上: 有限フーリエ級数による2次元境界要素法の内挿関数について, 土木学会中部支部研究発表会, 1986.

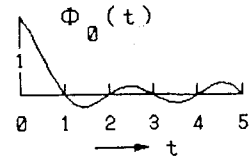


図-2 Φ_0 ($n=5$ のとき)

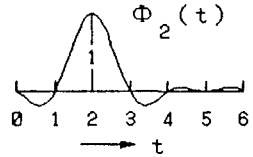


図-3 Φ_2 ($n=6$ のとき)

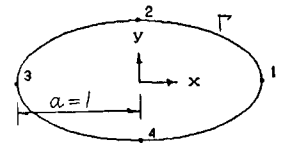
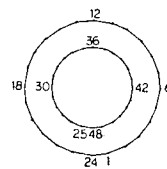
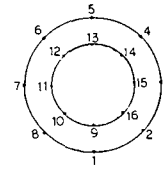


図-4 4節点による楕円



線形要素

要素数: 48
節点数: 48
分点数: 4



有限フーリエ級数要素

要素数: 2
節点数: 16
分点数: 12

図-5 要素分割図

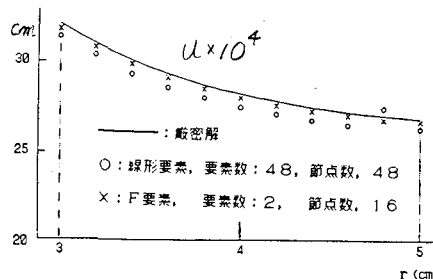


図-6 変位分布

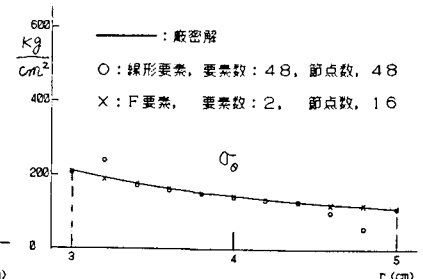


図-7 σ_{θ} 分布