# I-25　任意曲線部材のための伝達マトリックス法

岐阜大学　学生員　○塩谷　浩英
岐阜大学　学生員　　矢野　圭一
岐阜大学　正　員　　藤井　文夫

## 1. はじめに

直線はり部材に対する伝達マトリックス法[1]のField Matrixはすでによく知られているが、本研究では任意曲線部材に関するField Matrixを導いてみた[2]。通常の変位型有限要素法において、曲線部材を開発する際の問題点のひとつは、変位場の中で収束条件としての剛体変位が正確に含まれるか否かを論ずることである。伝達マトリックス法を用いた定式化の中では、簡単な幾何学的考察からこの問題を回避できることを示し、微分方程式からスタートすることなく、エネルギー法によって容易にField Matrixが得ることができた。このField Matrixは部材の曲線形状に依存し、形状表現が正確で、積分が容易な直線・曲線部材などについての厳密解を与える。多項式を用いて曲線形状を補間表現した場合でも精度の高い結果が得られる。

## 2. Field Matrix

任意の曲線要素ABの変位を剛体変位と弾性変形の2つに分けて考える。Fig.1では$C_0$が初期状態で、$C_1$が剛体変位後の位置である。$C_1$からさらに弾性変形して、最終的な曲線部材の変形形状を$C_2$とする。剛体変位部分は簡単な幾何学的考察から求めることができ、A端の変位を部材全体の剛体変位パラメーターにとると、B端の剛体変位は容易に表現することができる。次に、弾性変形については、A端を固定した状態でCastigliano's theoremを用いれば、B端の断面力とB端の変位との間の関係を表わすことができる（Fig.2）。さらに、B端の節点断面力は、$C_1$状態（Fig.1）での力のつり合いから、A端の節点断面力で表現することができる。

以上のようにして、節点Aから節点Bに状態量を伝達する区間伝達マトリックス表現は次のようになる。

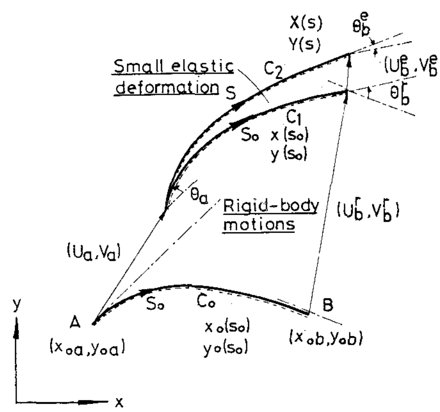



Fig. 1　Configurations of a curved element

$$
\begin{bmatrix} P_b \\ Q_b \\ M_b \\ U_b \\ V_b \\ \Theta_b \\ 1 \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{c|c|c}
\mathbf{B} & \mathbf{O} & \begin{matrix} P_d \\ Q_d \\ M_d \end{matrix} \\ \hline
\mathbf{D}\ \mathbf{E} & \mathbf{R} & \begin{matrix} U_d \\ V_d \\ \Theta_d \end{matrix} \\ \hline
0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0 & 1
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} P_a \\ Q_a \\ M_a \\ U_a \\ V_a \\ \Theta_a \\ 1 \end{bmatrix}
$$

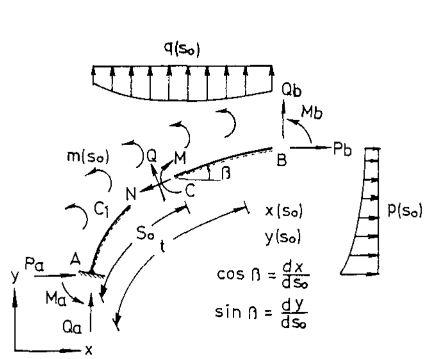



Fig. 2　Equilibrium in $C_1$

上式の係数マトリックスがField Matrixである。

ここで、このマトリックスの成分について簡単な説明をしてみる。部分行列については次のようである。

［R］：$C_0$から$C_1$へ剛体変位する場合B端の変位をA端の変位で表わすときに用いるマトリックス

［E］：$C_1$においてつり合い状態を考えたとき、B端の断面力をA端の断面力によって表わすために用いるマトリックス

［D］：$C_1$から$C_2$への弾性変形によるB端の変位をB端の断面力で表わすために用いるマトリックス

7列目は中間荷重が作用した場合のために加えたものであり、7行目は計算上のために付け加えられたものである。これら3つの部分行列は初期形状$C_0$に依存して導かれるので、$C_0$の表現が厳密なものであれば、導かれるField Matrixも厳密な解を与えることができる。また部分行列［D］を計算する際にエネルギー積分を考えなければならないが、これは部材の曲線形状に依存する。そこで、本研究では曲線形状をblending functionを用いて、形状補間することを行い、任意形状の曲線への対応を可能にした。

## 3．計算例

両端固定の深い左右対称円弧アーチの中央に、集中荷重Pが作用した場合について計算してみた（Table 1）。円弧アーチについては積分が容易であるゆえ、厳密解の算出が可能となる。一方、blending functionを用いて形状を補間した方法では、分割要素の数を多くすると、形状の表現がより厳密になるため、結果の精度の向上をみることができる。Fig.3は形状補間の例であるが、系の半分を2要素に分割することにより、すでに円形アーチの形状とほとんど一致していることがわかる。また、（Table 1）で示した数値上の結果においても、分割要素を多くすることにより、厳密解に近づいてゆく。直線部材や他の曲線要素による近似解と比較しても、本研究による結果は良好である。他の計算例については、講演当日に発表する予定である。

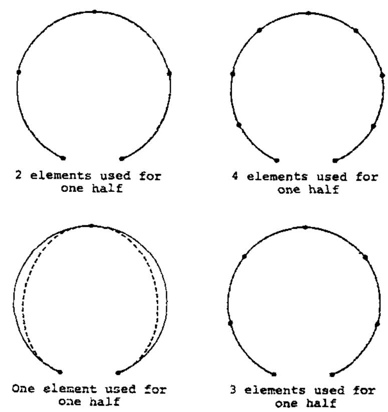
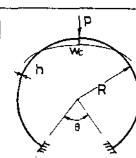



Fig. 3 Interpolation of arch geometry

Table 1 Linear solution for a circular ring

| Approach | No. of Elements used for one half | $p/w_c$ | Arch geometry |
|---|---|---|---|
| Present study | 2 curved elements | 948.4 |   |
| | 4 curved elements | 944.2 | |
| | 8 curved elements | 943.8 | |
| Displace-ment method | 8 straight elements | 964.2 | |
| | 8 curved elements | 946.6 | |
| Mixed method | 8 straight elements | 964.2 | $E = 1.05\ 10^7$ psi |
| | 8 curved elements | 946.8 | $R = 2.935$ in. |
| Hybrid method | 8 curved elements | 946.6 | $\theta = 45°$, $h = 0.125$ in. |
| Exact | | 943.7 | Width of the cross-section = 1.2 in. |

## 4．あとがき

伝達マトリックス法におけるField Matrixは、通常の変位型FEMにおける要素剛性マトリックスに相当するものであるが、本研究では、その部分行列を全変位が、剛体変位するものと、弾性変形するものとの2つに明確に分離できることに注目して導いている。これは、変位型FEMでは難しいとされている剛体変位を正確に含むという点において、有効な方法であると言える。また、blending functionを導入することにより、任意形状の系が比較的簡単かつ高精度で計算される点も注目に値する。

［参考文献］

1) E.C. Pestle and F.A. Leckie："Matrix Methods in Elastomechanics" McGraw-Hill, New York (1963)

2) San-xia Gong："Transfer matrix method applied to finite displacement theory of arbitrary arches", Gifu Univ., Master Thesis, 1986