

I-22

2次元応力集中問題のメッシュ分割について

福岡県庁 正員 石田隆雄 熊本大学 正員 平井一男
八代高専 正員 永田洋司 八代高専 内山義博

1. はじめに

応力集中問題を有限要素法を用いて解析する場合, その応力勾配の急変に応じて応力集中部近傍を細かいメッシュに細分割して解く必要がある。この時, 単に細分割しても計算機容量, 計算時間が増大するばかりで, その結果が正解であるという保証はない。メッシュを細分割する範囲の取り方, 分割形状の適否によつて, 厳密な応力値が得られるかどうかは決まる。本論文では, より少ない要素数で, しかも正確に集中部応力を算定できるメッシュ分割判定法を提案し, 数値計算でその妥当性について検討した。

2. メッシュ分割の判定法

弾性論によると, 2次元弾性問題では特殊な荷重状態の場合を除いて一般に, その応力分布は系の形状と周辺の荷重条件にのみ依存し, 弾性定数には無関係であることは周知である。一方, 有限要素法, 境界要素法などの様に系を離散化して解く解析法では, ポアソン比が変わると応力も変化するという事も周知である。しかし更に細分割を行ない応力値が厳密解に近づいていくと, その影響が小さくなっていく事は数値計算で確かめている⁽¹⁾。従つてポアソン比に左右されないメッシュ分割を行なえば, その解は系の厳密解になると考えられる。ポアソン比の変化が応力に及ぼす影響は, 応力 σ のポアソン比による微分値 $(\partial\sigma/\partial\nu)$ を見ればよい。微分値は, 系を再解析せずに求めることができ, しかも応力変化がより鋭敏に現れると思われる。応力ベクトル σ と変位ベクトル u の関係は次式で表わされる。

$$\sigma = DBu \quad (1)$$

ここで, D は応力-歪関係マトリックス, B は歪-変位関係マトリックスである。(1)式を ν で微分すると

$$\partial\sigma/\partial\nu = (\partial D/\partial\nu)Bu + DB(\partial u/\partial\nu) \quad (2)$$

となる。変位ベクトルと荷重ベクトル F の関係は, 剛性マトリックス K を用いて

$$F = Ku \quad (3)$$

である。両辺を ν で微分して, 変形すると

$$\partial F/\partial\nu = (\partial K/\partial\nu)u + K(\partial u/\partial\nu) = 0 \quad \therefore \partial u/\partial\nu = -K^{-1}(\partial K/\partial\nu)u \quad (4)$$

となる。ここで, $\partial K/\partial\nu$ は $\partial K/\partial\nu = \sum B^T(\partial D/\partial\nu)B$ である。

また, $\partial D/\partial\nu$ は となる。但し, E はヤング係数である。

$$\frac{\partial D}{\partial\nu} = \frac{E}{(1-\nu^2)^2} \begin{bmatrix} 2\nu & 1+\nu^2 & 0 \\ 1+\nu^2 & 2\nu & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\nu^2) \end{bmatrix} \quad (5)$$

従つて, 式(2)を用いれば応力のポアソン比での微分値は求められる。更に, これを用いて主応力, 主せん断応力の微分値は

$$\partial\sigma_1/\partial\nu = \frac{1}{2}(\partial\sigma_x/\partial\nu + \partial\sigma_y/\partial\nu) \pm \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} \left\{ \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) (\partial\sigma_x/\partial\nu - \partial\sigma_y/\partial\nu) + \tau_{xy} (\partial\tau_{xy}/\partial\nu) \right\} \quad (6)$$

$$\partial\tau_{xy}/\partial\nu = \frac{1}{2}(\partial\sigma_x/\partial\nu - \partial\sigma_y/\partial\nu) \quad (7)$$

で求められる。この主応力, 主せん断応力の微分値を用いて, メッシュ分割の適否の判定を行なう。

3. 数値計算及び結果の考察

図-1に示す様な長方形平板の一樣引張り問題について数値計算を行ない, 提案法の妥当性について検討する。モデル諸元を表-1に示す。図-1の板の中央に円弧穴をもつ円弧(A)モデル, 中央に楕円穴をもつ楕円(B)モデル, 点線で示す様に長辺に4個の半円弧ノッチをもつノッチ(C)モデルと3モデルを解析した。各モデルの下添字は分割領域, 形状の違いを示す。各モデル共円弧であるので, 板の1/8部分を取り出し解析した。

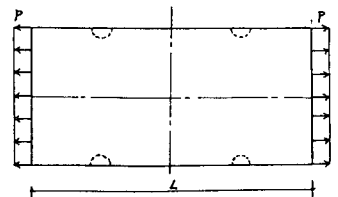


図-1 長方形平板

図-2,3,5,6は主応力, 主せん断応力のポアソン比による微分値を3~4ランクに分けてプロットしたものである。図-2,4にAモデルの解析結果を示す。図-3でA₁モデルは正解に近めらかに収束しているが, A₂モデルは振動している。この理由は, 主応力の微分値の分布を見れば明らかである。即ち, A₁モデルで大きい微分値は集中部近傍のみに分布しているのに対し, A₂モデルでは図全体に分布している。大きい微分値を残したまま集中部近傍のみを細分割していった結果が図-3である。従って主応力の微分値により, どの範囲まで細分割するかという領域の判定ができる。図-5,6,7はBモデルの解析結果である。B₁, B₂モデルは応力集中係数の値(図9)はなめらかに上昇している。これは主応力の微分値の大きい要素を細分割していった結果であり, ともかく主応力の微分値の大きい要素を細分割していけば, A₂モデルの様に振動はせずなめらかに上昇していく事が分る。

表-1 モデル 諸元			
分布 荷重 P	1 kg/mm ²	円弧直径 r	2.0mm
長さ L	40 mm	楕円長径 D ₁	4.0mm
巾 B	20 mm	楕円短径 D ₂	2.0mm
板厚 t	1 mm	ノッチ 半径 r ₁	1.0mm
弾性係数 E	1 kg/mm ²	ノッチの中心 距離 b	10 mm
ポアソン比 ν	0.3		

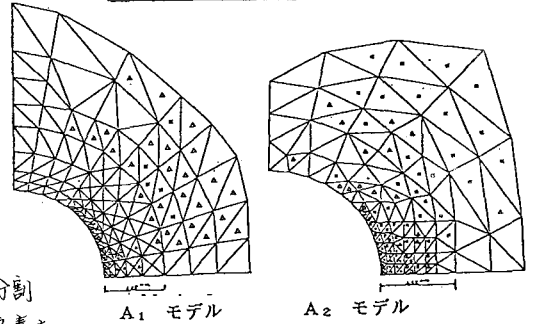


図-2 円弧モデル($\partial\sigma/\partial\nu$)

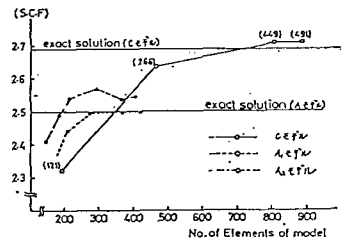


図-4 円弧、ノッチ モデルの解析結果

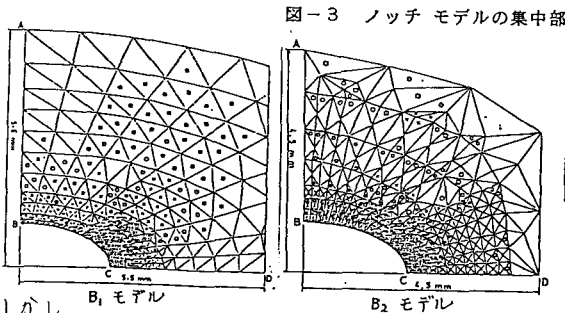


図-3 ノッチ モデルの集中部

しかし, B₂モデルの集

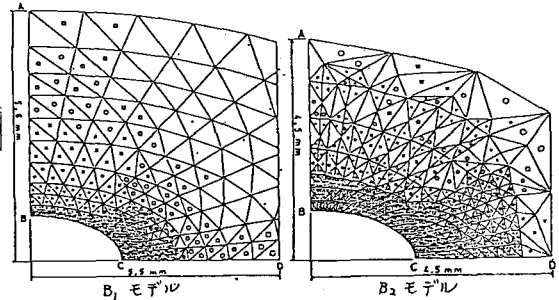


図-5 楕円モデルの集中部($\partial\sigma/\partial\nu$)

中係数は正解まで上昇しない。両モデルの違いは, 三角形メッシュの形状である。そこで主せん断応力の微分値の分布を見ると, B₁モデルは集中部近傍に大きい値が集まっているのに対しB₂モデルでは広く分散している。特に扁平な三角形要素とその近傍, あるいは大きい要素から急に小さな要素に移る境目に微分値の小さな値が分布している。従って主せん断応力の微分値の大小によりメッシュの形状が適切かどうかの判定ができる。掲載していないがB₂モデルで最外側の扁平要素のみを修正するとB₁モデルの集中係数に近づく結果を得る。最後に, 範囲, 形状をチェックしながら解析したのがCモデルである。なめらかに正解へ収束している。

図-6 楕円モデルの集中部($\partial\tau/\partial\nu$)

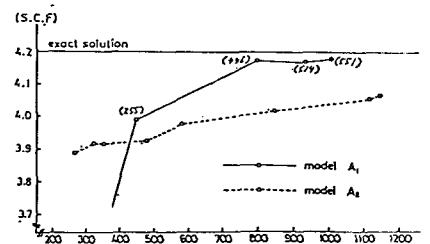


図-7 楕円モデルの解析結果

4. 結論: 前項の事より, 応力がポアソン比に無関係な系では, 応力のポアソン比による微分値によって適正なメッシュ分割であるかどうかの判定ができる。

(参考文献) の平井・水田・内山・今村: 応力集中部のメッシュ領域判定について, 第40回年次学術講演会講演要集, 1985年9月