

I-21

内部に集中力を受ける半無限直交異方弾性体の解析

日本電子計算(株) 小谷 彦之
大阪工業大学 堀川 都志雄
大阪市立大学 園田 恵一郎

1 はしがき 半無限弾性体に集中力が作用する3次元問題は、等方弾性体では Boussinesq, Cerruti および Mindlin の解として知られている閉じた解(代数解)があり、地盤の変位や応力の算定によく用いられている。横等方弾性体については、Y.C. Pan ら¹⁾、松岡ら²⁾は Boussinesq と Cerruti 型の解を発表している。しがしながら、直交異方弾性体でこのような閉じた解を得ることは困難であり、数値解析によらねばならない。著者らは直交異方弾性体の変位関数にフーリエ級数やフーリエ変換を施すことによって、直交異方性厚板や無限領域をもつ2層問題の解析を行った^{3), 4)}。

本研究においては、変位関数にフーリエ変換を適用し、半無限直交異方弾性体の内部に集中力が作用するいわゆる Mindlin 問題の数値解析を行い、荷重点近傍の3次元応力状態を調べる。

2 解析方法 直交異方弾性体のフックの法則は、

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \\ & C_{44} & \\ & & C_{55} \\ & & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $C_{ij} (i, j=1, 6)$: 弾性定数

直交異方弾性体の変位関数の基礎式および変位との変換式は、それぞれ次のように得られる。

$$\mathbb{L}^0(x, y, z) F_i^0 = -\frac{2B_5 B_7}{B_1 B_4} X_i \quad (i=1, 3) \quad (2)$$

$$2B_5 \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1^0 \\ F_2^0 \\ F_3^0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

ここで、

$\mathbb{L}^0(x, y, z)$, $L_{11} \sim L_{33}$: 文献3)の微分演算子、

$X_i (i=1, 3)$: x, y および z 方向の物体力、

$B_1 = C_{11}$, $B_4 = C_{44}$, $B_5 = C_{55}$, $B_7 = C_{12} + C_{44}$

Mindlin 問題では、集中力が自由表面に垂直と水平方向に作用する2つの状態がある。本稿ではそれらを M-I, M-II 問題と称し、解析の手順を以下に略記する(図-1参照)。

① 集中力を小さな体積内で一様に分布する物体力に置換し、物体力の作用する薄層の無限板(オ2層)を考える。

② 有限厚さをもつ無限板(オ1層)と半無限領域を占める弾性体(オ3層)で、この薄層を上下方向から挟む。

③ 各々の接合面での変位と応力を連続させるように3層構造を解析し、各層の変位と応力を求める。

また、座標軸をオ1, 2層では板の中央面に、オ3層では表面にとる。

いま、M-II問題の変位関数は、次のようになる。

例えば、物体力 X_1 が作用するオ2層の変位関数 f_2 は、式(2)より

$$f_2 = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ g + C_1 \operatorname{ch} \lambda_1 z + C_2 \operatorname{sh} \lambda_1 z + (C_3 \operatorname{ch} \bar{\lambda}_2 z + C_4 \operatorname{sh} \bar{\lambda}_2 z) \cos \bar{\lambda}_3 z \right. \\ \left. + (C_5 \operatorname{ch} \bar{\lambda}_2 z + C_6 \operatorname{sh} \bar{\lambda}_2 z) \sin \bar{\lambda}_3 z \right\} \sin \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta \quad (4)$$

ここに、 $\lambda_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$: 式(2)の特性方程式の根、 g : 物体力 X_1 による特解

$C_1 \sim C_6$: 板の上下面の境界条件から決定される積分定数

オ1層の変位関数 f_1 は、式(4)で物体力による影響を無視することにより容易に得られる。

オ3層の半無限体に対しては、式(4)に無限遠で変位と応力が消失する条件と物体力の項を零とすれば、

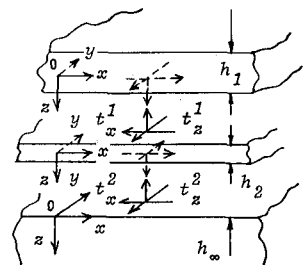


図-1 Mindlin問題の置換え

$$f_3 = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[D_1 e^{\lambda_3 z} + D_2 e^{-\lambda_3 z} \cos \lambda_3 z + D_3 e^{-\lambda_3 z} \sin \lambda_3 z \right] \sin \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta \quad (5)$$

ここで、 $D_1 \sim D_3$: 半無限体表面の境界条件より決定される積分定数

式(4), (5)の積分定数を各板に作用する伝達力で表し、さらに、式(3)から導かれる変位 u, v および w の式に代入すれば、フーリエ変換のパラメータ α, β ごと次式が得られる。

・オ1層の下面の変位

$$2B_5 \psi_1^s = P X_1$$

ここに、

$$\psi_i = (\bar{u} \bar{v} \bar{w})_i^T : \text{オi層での変位 } u, v, w \text{ のフーリエ係数のマトリックス,}$$

・オ2層の上下面の変位

$$X_j = (\bar{t}_x \bar{t}_y \bar{t}_z)_j^T : \text{オj番目の接合面に働く伝達力 } t_x, t_y, t_z \text{ の}$$

フーリエ係数のマトリックス

$$2B_5 \begin{pmatrix} \psi^u \\ \psi^l \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S^u \\ S^l \end{pmatrix} \quad (6-2)$$

S : 物体力による影響項

・オ3層の上面の変位

u, l : 板および半無限体の上下面を意味する。

$$2B_5 \psi_3^u = R X_2$$

$$(6-3)$$

各接合面での変位の連続条件より、伝達力 $t_x, t_y \sim t_z$ に関する式が得られる。

$$\begin{pmatrix} Q_{11}-P & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22}-R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} S^u \\ S^l \end{pmatrix} \quad (7)$$

3数値計算例 採用した弾性定数³⁾を示すと、

$$C_{11}=1.75, C_{12}=1.00, C_{13}=1.25, C_{22}=3.75, C_{23}=2.26,$$

$$C_{33}=4.51, C_{44}=0.51, C_{55}=1.00, C_{66}=1.25$$

集中力 P の代用である物体力を、 x, y 方向にそれぞれ $0.02a$, z 方向には板厚 $h_2=0.02a$ の体積内に一様分布させる。また、フーリエの逆変換にはシンプソンの数値積分を用い、積分の上限値を100, 分割数を500として計算している。

なお、 a はある基準の長さである。

深さ c/a による変位 w および応力 σ_z の影響を表-1, 2に示す。

図-3は $y=0$ の断面における応力 σ_x の等高線であり、実線は本計算値で、また破線は等方弾性体のMindlinの解の結果を示す。

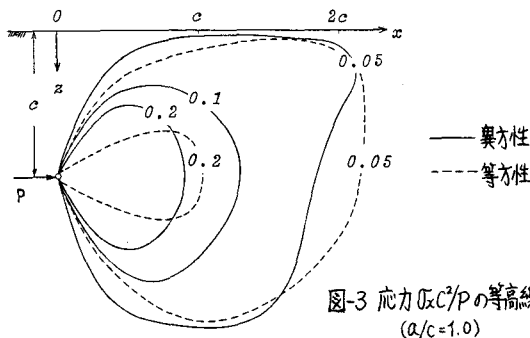


図-3 応力 $\sigma_x c^2 / P$ の等高線
($a/c=1.0$)

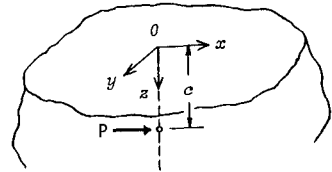


図-2 集中力を受ける半無限体

表-1 c/a による $2B_5 \alpha / P / \sigma_z$ の比較 ($x/a = y/a = 1.0$)

$c/a =$	2.0	1.0	0.5	0.03	0.0*
$z/a = 0.0$	-1.106	-0.746	0.953	3.506	3.732
0.5	-1.057	-0.126	—	4.647	4.860
1.0	-0.757	—	2.214	4.964	5.168
2.0	—	1.476	2.323	3.541	3.648
3.0	0.812	1.372	1.628	2.125	2.170

* Cerruti-タイプの問題での値⁴⁾

表-2 c/a による $\alpha^2 P / \sigma_z$ の比較 ($x/a = y/a = 1.0$)

$c/a =$	2.0	1.0	0.5	0.03	0.0*
$z/a = 0.0$	0.0	0.0	0.0	0.0	—
0.5	0.051	0.093	—	-1.299	-1.347
1.0	0.551	—	-0.477	-3.514	-3.682
2.0	—	-0.036	-1.829	-3.587	-3.738
3.0	0.012	-1.114	-1.319	-1.844	-1.896

* Cerruti-タイプの問題での値⁴⁾

1) Y.C. Pan et al., Trans. ASME, Vol. 43, pp.608-612, 1976

2) 松岡他, 日本建築学会論文報告集, 才256号, 昭和52年,

3) K. Sonoda et al., Theo. Appl. Mech., Vol. 29, pp.117-126, 1981

4) 堀川他, 数値解析法シンポジウム, pp.85-90, 昭和60年.