

I-20

集中荷重を受ける2か所変位拘束された弾性体の縦せん断問題

愛知 県 正 員 杉本 孝博
名古屋工業大学 正 員 長谷部宣男

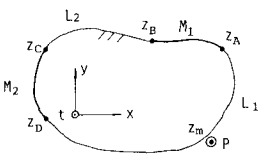
まえがき 縦せん断問題において、2か所の固定境界を有する等方均質弾性体に集中荷重が作用した場合の複素応力関数、等角写像関数を用いた形で求める。同様な境界条件下で一樣荷重を受ける場合についてはすでに報告した[1]。本報告の応力関数はまず変位と合力の境界条件を用いて求められるが、これより得られる解は積分項を含み、その積分を行なうことは難しい。そこでこの解が写像関数、すなわち形状に無関係であることに着目し、形状を簡単な境界を有するもの、すなわち半無限弾性体に限定し、それを変位勾配と応力の境界条件式を用いて応力関数を一次導関数の形で求める。得られた解に半無限形状の写像関数を代入すれば任意形状に対する応力関数が得られる。2か所の固定境界をもつこの問題は対称性のある2重連結弾性体の問題の解を与える。解析例ではこれを利用して、集中荷重を受ける弾性体として一般的な帯状弾性体を考え、その内部にクラックを有する問題を取り上げる。

解法 図-1に示すように複素平面 $z = x + iy$ 上に物理領域をとる。これを z 平面上の単位円内部に等角写像する写像関数を $w(s)$ とする。すなわち、

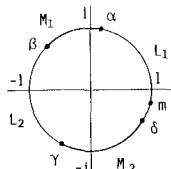
$$z = w(s) \quad (1)$$

z 平面、 s 平面上の諸量を図-1のようにとる。ただし $z_A = w(\alpha)$, $z_B = w(\beta)$, $z_C = w(\gamma)$, $z_D = w(\delta)$, $z_m = w(m)$ であり、 $M = M_1 + M_2$ は変位の与えられる境界、 $L = L_1 + L_2$ は外力の与えられる境界である。

領域内で正則な複素応力関数 $\phi(z) = \phi(w(s)) = \varphi(s)$ は縦せん断応力 τ_{xz} , τ_{yt} および写像関数で表わされる曲線



$z = x + iy$



s -plane

図-1 任意形状弾性体と単位円

座標における応力成分 τ_{xz} , τ_{yt} と次のような関係をもつ。ただし G はせん断弾性係数である。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} - i\tau_{yt} &= G(\tau_{xz} - i\tau_{yt}) = G' G \varphi'(s) / w'(s) \\ G' &= 3w'(s) / (13w'(s)) \end{aligned} \right\} (2)$$

境界上の変位の式と外力の式とを組み合わせることにより、境界条件式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\sigma) + \delta(\sigma)\varphi(\sigma) - \varphi(\bar{\sigma}) &= f(\sigma) \\ \delta(\sigma) &= \begin{cases} 0 & \text{on } L \\ -2 & \text{on } M \end{cases}, \quad f(\sigma) = \begin{cases} \frac{2i}{G} [\int \tau_{xz} ds + C_0] & \text{on } L \\ -2w & \text{on } M \end{cases} \end{aligned} \right\} (3)$$

σ は単位円周上の点であり、 $\int \tau_{xz} ds + C_0$ は合力、 w は縦方向の変位である。境界条件は L_1 の内の z_m から z_A までの区間で $f(\sigma) = 2iP/G$, L_2 上で $f(\sigma) = 2iC_p/G$, 他の境界で $f(\sigma) = 0$ である。 C_p は M_1 上の合力を意味する。式(3)に $dw / [2\pi i(\sigma - s)]$ を乗じ、単位円周上で積分することによって得られる方程式を解き、上述の境界条件を考慮すると、最終的に $\varphi(s)$ が次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(s) &= \frac{C_p}{\pi i} F(s) + \frac{P}{\pi i} G(s) + \text{const} \\ F(s) &= \log \frac{\alpha - s}{\beta - s} - \frac{\chi(s)}{\pi i} \int_M \frac{\log \frac{r - \sigma}{\beta - \sigma}}{\chi(\sigma)(\sigma - s)} d\sigma \\ G(s) &= \log \frac{\alpha - s}{m - s} - \frac{\chi(s)}{\pi i} \int_M \frac{\log \frac{\alpha - \sigma}{m - \sigma}}{\chi(\sigma)(\sigma - s)} d\sigma \\ \chi(s) &= (s - \alpha)^{1/2} (s - \beta)^{1/2} (s - \gamma)^{1/2} (s - \delta)^{1/2} \end{aligned} \right\} (4)$$

これより $\varphi(s)$ が写像関数 $w(s)$ に無関係であることがわかる。

次に境界が x 軸である半無限体が無限遠で集中力 P を受ける問題を考える。境界条件式は応力の自由境界での解析接続の原理を用いて次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi^+(z) + \phi^-(z) &= 2w / \partial z \quad \text{on } M \\ \phi^+(z) - \phi^-(z) &= -2i\tau_{xz} / G \quad \text{on } L \end{aligned} \right\} (5)$$

z は x 軸上の点である。この Riemann-Hilbert の問題を解き、境界条件 (M 上で $\partial w / \partial z = 0$, L 上で $\tau_{xz} = 0$)、無限遠での条件 (応力 = 0、合力 = P) を考慮すると $\phi(z)$ は結局次のようになる。

$$\left. \phi(z) = \frac{P}{\pi i} (z + a_0) Y(z) \right\} (6)$$

$$Y(z) = (z-z_A)^{\frac{1}{2}}(z-z_B)^{\frac{1}{2}}(z-z_C)^{\frac{1}{2}}(z-z_D)^{\frac{1}{2}} \quad \text{)} \quad (7)$$

A_0 は未定係数である。式(6)に半無限領域で単位円内に写像する写像関数 $Z = E_0/(m-s) - E_0/2$ (ただし無限遠を $s = m$ に対応させている)を代入すると、 $\phi'(z) = \varphi'(s)/W'(s)$ より $\varphi'(s)$ が次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(s) &= \frac{P}{4\pi} \left(\frac{1}{m-s} + A_0 \right) \frac{y(s)}{y(m)} \\ y(s) &= (s-\alpha)^{\frac{1}{2}}(s-\beta)^{\frac{1}{2}}(s-\gamma)^{\frac{1}{2}}(s-\delta)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

未定係数 A_0 は2つの固定区画 M_1, M_2 の相対変位がゼロであるという条件と L_2 区画が自由境界であるということより得られる式 $\varphi(r) - \varphi(\beta) = \int_{\beta}^r \varphi'(o) do = 0$ より求まれ、単位円周を実軸に写すような変換 $z = E_0/(m-o) - E_0/2$ を用いて実数積分に変換することにより次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= -\left(\frac{1}{m-r} - \frac{1}{m-\delta} \right) \frac{\Pi(c^2, k)}{K(k)} - \frac{1}{m-\delta} \\ c^2 &= \frac{(m-\delta)(\beta-r)}{(m-r)(\beta-\delta)}, \quad k^2 = \frac{(\beta-r)(\alpha-\delta)}{(\alpha-r)(\beta-\delta)} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$K(k), \Pi(c^2, k)$ はそれぞれ1種、2種の完全楕円積分である。

解析例 図-2(a)に示すような、無限遠で集中荷重 P を受ける傾斜面を有する帯状弾性体を考える。傾斜角度が 45° の場合を例にとっている。図のように傾斜境界 $B-C$ の2区画が固定された問題を考えると、対称性より図-2(b)に示した内部クラックを有する直角に折れ曲がった帯状弾性体の問題と同じである。さらに固定区画の位置により、例えば図-2(c)、(d)の

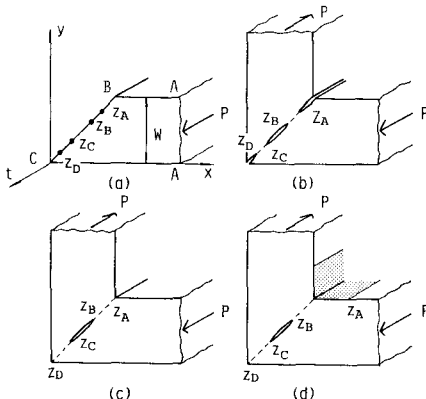


図-2 45° の斜面を有する帯状弾性体と内部クラックを有する直角に折れ曲がった帯状弾性体

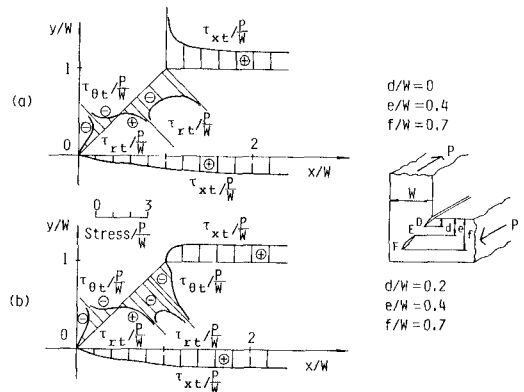


図-3 応力分布

ような問題にもなる。またこのような帯状弾性体の応力分布の例を2つのケースについて図-3(a)、(b)に示す。なお図-2(a)に示した形状の写像関数は、Schwarz-Christoffelの変換公式より得られ、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} Z = w(s) &= -\frac{W}{\pi} \left\{ \log \frac{u-a}{u+a} + i \log \frac{u-ia}{u+ia} \right\} + W(1+i) \\ u &= \left(\frac{3+i}{3-i} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad a = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ただし帯形状の無限遠を $s = 1 (m=1)$ に、隅角部 B, C をそれぞれ $i, -i$ に対応させている。

あとがき 2か所の固定境界を有する任意形状弾性体が集中荷重を受ける場合の複素応力関数の閉じた厳密解が一次導関数の形で式(7)のように得られた。集中荷重が複数載荷している場合は重ね合わせを用いればよい。また $\beta = \gamma$ とすることにより、1か所が固定された問題の解も得られる。

写像関数の一次導関数 $w'(s)$ が求まれば式(2)より応力を求めることができる。形状が多角形のものであればSchwarz-Christoffelの変換公式により $w(s)$ が簡単に求めることができる。

2か所の固定境界を有する具体的な問題としては、剛なもので2か所を補強された弾性体の問題、表面上の介在物の内側からハク離れあるいはクラックが生じている問題等が挙げられる。また解析例で示したようにこの問題の解から対称性を有する2重連結弾性体の問題の解を得ることができる。

参考文献 [1] Hasebe, Sugimoto, Nakamura, Journal of Applied Mechanics, ASME, (accepted)