

山梨大学・工学部 平島 健一
 福島高等・土木科 根岸 嘉和
 大成建設(株) 〇 小屋 博俊

1. 緒言 本論文では、厳密には存在しない平面応力状態の問題と三次元弾性学の基礎関係式と平板の板厚方向表面の応力自由(stress free)の境界条件と満足するようにして理論式を構築した著者らの先の論文¹⁾に基づき、幾つかの数値解析と実行した結果を報告する。なお、定式化した理論式は任意次数の面内、面外問題に対しても成立するようになっているが、低次の結果に相当する面内問題(Sherbeの問題)の例が、最近Clarke^{2,3)}によって発表されてゐるので、それとの比較を含めて議論する。

2. 変位、応力の混合仮定に基づく一般化平板理論¹⁾ 右手系の直交デカルト座標系内の等厚平板に対して、応力および変位成分と板厚方向(z方向)の表面における境界(荷重)条件と満足するように、無次元化板厚座標 $\zeta = z/b$ ($2b = h$: 板厚)に因する無限級数に展開する。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{\alpha\beta}^{(n)} \cdot P_n(\zeta), & u_{\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} u_{\alpha}^{(n)} \cdot P_n(\zeta), \\ \tau_{\alpha z} &= \sum_{n=0}^{\infty} b \cdot \tau_{\alpha z}^{(n)} \cdot R_n(\zeta), & \tau_{zz} &= -p_2 + b^2 \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{zz}^{(n)} \cdot S_n(\zeta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

==に、添字 α, β は板面内の座標 x, y を意味し、 $P_n(\zeta)$ は Legendre 多項式であり、 $R_n(\zeta), S_n(\zeta)$ はそれぞれ $R_n(\zeta) = \int P_n(\zeta') d\zeta'$, $S_n(\zeta) = \int R_n(\zeta') d\zeta'$ (2) の関係で定義される多項式である。

==これらの仮定から、物体力と無視した釣合方程式の重みつき積分平均による表示が、上記の各応力係数 $\tau_{ij}^{(n)}$ の直接的な関係式として次式のように得られる。

$$\tau_{\alpha\beta,\beta}^{(n)} + \tau_{\alpha z,\alpha}^{(n)} = 0, \quad \tau_{\alpha z,\alpha}^{(n)} + \tau_{zz,\alpha}^{(n)} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

==に、コマの後の添字は、その添字の座標による偏微分を意味する。 α, β に関して和の規約と採用してゐる。

次に、 $\tau_{ij}^{(n)}$ と変位係数 $u_j^{(n)}$ との間の構成関係式と、弾性論の幾何関係式と構成関係式との融合式の重みつき積分表示として得るこにより、平板理論と定式化できるが、具体的な表示式は省略する。

3. 面内力を受ける平板(Sherbe)問題 前節のように展開して取扱う場合、面内方程式に寄与するのは級数展開の偶数次項のみであり、奇数次項のみを採用して構成される面外(曲げ; Platte)方程式とは対をなす。==ここでは、上添字(n)で $n=0, 2, 4$ と採用した3次理論式の導出法(構成法)によって扱われる。まず、式(3)を満たすように断面前函数 $K^{(0)}, \Omega^{(2)}, \Omega^{(4)}, \Psi^{(2)}$ および $\Psi^{(4)}$ を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx}^{(0)} &= K_{,yy}^{(0)}, \tau_{yy}^{(0)} = K_{,xx}^{(0)}, \tau_{xy}^{(0)} = -K_{,xy}^{(0)}; \tau_{xz}^{(2)} = -\Omega_{,y}^{(2)} - \Psi_{,x}^{(2)}, \tau_{yz}^{(2)} = \Omega_{,x}^{(2)} - \Psi_{,y}^{(2)}, \tau_{zz}^{(2)} = \nabla^2 \Psi^{(2)}; \\ \tau_{xz}^{(4)} &= -\Omega_{,y}^{(4)} - \Psi_{,x}^{(4)}, \tau_{yz}^{(4)} = \Omega_{,x}^{(4)} - \Psi_{,y}^{(4)}, \tau_{zz}^{(4)} = \nabla^2 \Psi^{(4)}, \quad \nabla^2 = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

次に、 $\tau_{\alpha\beta}^{(n)}, \tau_{\alpha z}^{(n)}$ と上式で定義された断面前函数を表わすこを考えると、その導出過程で次の関係式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 (K^{(0)} - A_0 \Psi^{(2)}) &= 0, A_1 b^2 \nabla^2 \Omega^{(2)} - A_2 b^2 \nabla^2 \Omega^{(4)} - \Omega^{(2)} = 0, A_3 b^2 \nabla^2 \Omega^{(4)} - A_4 b^2 \nabla^2 \Omega^{(2)} - \Omega^{(4)} = 0, \\ B_1 b^4 \nabla^4 \Psi^{(2)} - B_2 b^4 \nabla^4 \Psi^{(4)} - B_3 b^2 \nabla^2 \Psi^{(2)} + B_4 b^2 \nabla^2 \Psi^{(4)} + \Psi^{(2)} &= 0, B_5 b^4 \nabla^4 \Psi^{(4)} - B_6 b^4 \nabla^4 \Psi^{(2)} - B_7 b^2 \nabla^2 \Psi^{(4)} + B_8 b^2 \nabla^2 \Psi^{(2)} + \Psi^{(4)} = 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

==に、 A_j, B_k は弾性定数を含んだ定数係数。 $\tau_{\alpha\beta}^{(n)}, \tau_{\alpha z}^{(n)}$ は最終的な結果として次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx}^{(2)} &= \Psi^{(2)} - X_{,yy}^{(2)} + C_1 (2\Omega_{,xy}^{(2)} - \frac{1}{3}\Omega_{,xy}^{(4)}), \tau_{yy}^{(2)} = \dots, \tau_{xy}^{(2)} = X_{,xy}^{(2)} + C_1 \{ (\Omega_{,yy}^{(2)} - \Omega_{,xx}^{(2)}) - \frac{1}{6}(\Omega_{,yy}^{(4)} - \Omega_{,xx}^{(4)}) \}, \\ \tau_{xx}^{(4)} &= \Psi^{(4)} - X_{,yy}^{(4)} - C_2 (\frac{1}{3}\Omega_{,xy}^{(2)} - \frac{2}{11}\Omega_{,xy}^{(4)}), \tau_{yy}^{(4)} = \dots, \tau_{xy}^{(4)} = \dots, \\ X^{(2)} &= D_1 \Psi^{(2)} - D_2 \Psi^{(4)} - D_3 \nabla^2 \Psi^{(2)} + D_4 \nabla^2 \Psi^{(4)} + D_5 \nabla^2 (K^{(0)} - A_0 \Psi^{(2)}), X^{(4)} = \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

==で C_i, D_j は係数。上述の式で添字(n)で $n=0, 2$ と採用(i.e. $\Omega^{(0)} = \Psi^{(0)} = 0$) したものは Clarke & Reissner³⁾ による2次理論式となる。添字(n)で $n=0$ と採用(i.e. $\Omega^{(2)} = \Omega^{(4)} = 0, \Psi^{(2)} = \Psi^{(4)} = 0$) したものは、古典的平面応力

状態に他ならず、断面力関数 $K^{(n)}$ は Airy の応力関数に完全に一致し、いわゆる1次理論式が構成される。

4. 数値計算例 Fig. 1のように半無限板の端部に、連続する正弦曲線状の鉛直力が作用する問題と考えるものとすれば、境界条件は

$$\tau_{yy}(x, 0, z) = \sigma_0 \cos \alpha x, \quad \tau_{xy}(x, 0, z) = \tau_{yz}(x, 0, z) = 0, \quad (\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}) \dots (7)$$

で与えられる。上式に対応する $\tau_{ij}^{(n)}$ の条件は次のように書き表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yy}^{(0)}(x, 0) &= \sigma_0 \cos \alpha x, \quad \tau_{xy}^{(0)}(x, 0) = 0, \quad \tau_{yz}^{(0)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = \tau_{yz}^{(2)}(x, 0) = 0 \\ \tau_{yy}^{(4)}(x, 0) &= \tau_{xy}^{(4)}(x, 0) = \tau_{yz}^{(4)}(x, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

この条件のもとで、式(5)を解き、断面力関数を求めることが出来る。

その結果を式(4)、(6)に代入し、さらにその結果を式(1)に代入すれば、各応力値が求められることになる。

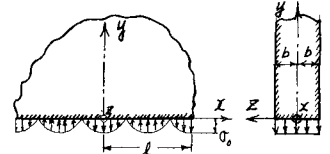


Fig. 1 半無限弾性平板に正弦分布荷重

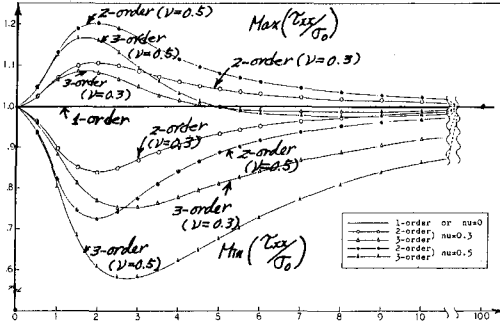


Fig. 2 X軸上(y=0)での τ_{xy}/σ_0 の最大値と最小値

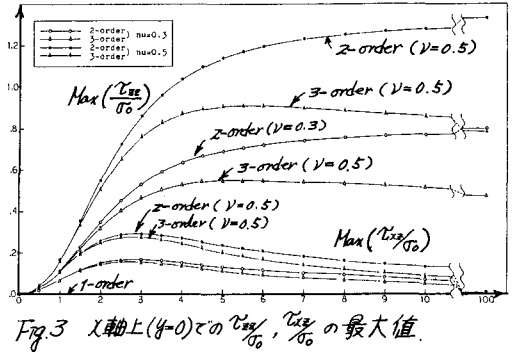


Fig. 3 X軸上(y=0)での $\tau_{xy}/\sigma_0, \tau_{yz}/\sigma_0$ の最大値

Fig. 2 は板厚と載荷波幅の比 $bd = 2\pi b/\lambda$ とポアソン比 ν とパラメータ τ_{xy}/σ_0 としたときの端部 ($y=0$) での $\max(\tau_{xy}/\sigma_0)$, $\min(\tau_{xy}/\sigma_0)$ と図示したものである。古典的平面応力解である1次理論では常に1.0であり、 $bd \rightarrow 0$ 或 ∞ になるにつれて、2次、3次理論でもこの値に近づく。またその差が最も大きくなるのは $bd \approx 2 \sim 3$ (i.e. $2b/\lambda \approx \pi/2 \sim \pi$) のときであり、これは載荷波幅と板厚 $2b$ が同程度であることを示している。次に古典平面応力解(1次理論)では省略される τ_{xz}, τ_{zz} についてその結果を Fig. 3 に示した。 τ_{xz} の最大値は $bd \approx 3.0$ で生じることが、これはより大きな bd に肉しても無視できないものとなっている。 Fig. 4~6 は $bd = 4.0$ の場合の τ_{xz}, τ_{zz} の分布を描いたものである。理論の次数が高くなるにつれて補正の効果が変わってくるのが読み取れる。

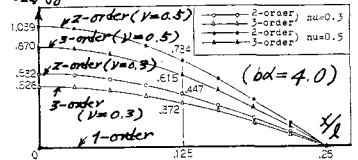


Fig. 4 X軸上(y=0)で板中央面(z=0)における τ_{xz}/σ_0 の分布

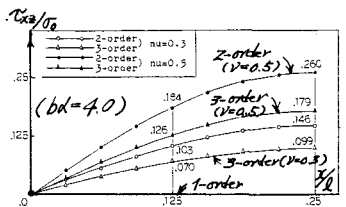
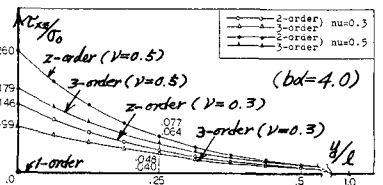


Fig. 5 X軸上(y=0)で $z/b = 0.5$ の位置での τ_{yz}/σ_0 の分布



その値が大きくなる程、古典平面応力解(1次理論)との差も大きくなる。…… Fig. 6 $x/b = 0.25, z/b = 0.5$ の位置での τ_{xz}/σ_0 の分布

6. 参考文献 1) 平島・根岸, 「応力および変位仮定に基づく平板の一般化高次理論の定式化」, 土木学会論文集, No. 350 (1984), pp. 351~354. 2) Clark, R.A., "Three-dimensional corrections for a plane stress problem", Int. J. Solids & Struct., (1985), pp. 3~10. 3) Clark, R.A. & Reissner, E.; ZAMP, (1984), pp. 883~889.