土木学会第41回年次学術講演会(昭和61年11月)

I-17 動的応答解析における有限要素離散化モデルの固有振動数誤差の理論的評価手法

武蔵工業大学　正員　増田陳紀　　武蔵工業大学　正員　西脇威夫
武蔵工業大学　正員　皆川　勝　　横河技術情報　　松尾和則

1．はじめに　構造物の動的応答解析を行なう場合、空間に関しては構造物を離散化したモデルで置き変え、この離散化モデルに対して得られる運動方程式としての常微分方程式を何等かの時間積分手法を用いて解くことが一般的である。したがって、例え時間積分を厳密に行ったとしても求められる応答計算の結果は、空間の離散化における離散化誤差のために、離散化する前の系が示すであろう応答とは異なったものとなる。通常の構造物の動的応答解析の場合には、支配的な振動数成分はその系の幾つかの低次の固有振動数成分であり、それらの中で最も高次の固有振動数成分を必要な範囲内で十分精度良く表し得る程度に離散化を行えば良く、高次の固有振動数成分に関する誤差は実際的な応答計算には何等の影響も及ぼさない。しかし、衝撃的な挙動を追跡したり、波動伝播解析を行なう場合のように局部的な振動を扱う際には、かなり高次の振動数成分までも無視し得ない寄与を有し、離散化に当っては通常の動的解析の場合とは異なった配慮が必要となる。必要な離散化の程度を決定するためには、各次の固有振動数の近似度が離散化の方法とどのような関係があるかを把握することが必要である。従来、有限要素法におけるこの問題を数値実験的に検討した研究は著者ら[1]のものなどがあるが、理論的に取り扱った研究は数学者[2]によるものを除くと少なく、Walzらによる成果が代表的であるものの、必ずしも十分満足できる結果を与えているとはいえない。　本論は、動的応答解析に際して有限要素法により空間を離散化する場合に生ずる離散化誤差が、各固有振動数の近似精度により表されるものと考え、一次元の棒の縦振動問題を対象として、その近似精度と要素分割数との関係を表す理論式を誘導した経過、ならびに得られた理論評価式の妥当性を検証した結果を報告するものである。

2．固有円振動数精度評価式誘導の考え方　提案する離散化誤差評価手法の概要は以下の通りである。まず、有限要素により離散化された系において、境界条件の影響を受けない内部の領域の挙動を記述する運動方程式群から、離散化漸化式を差分法の誤差評価手法に従って求め、これらを連立代数方程式として解き、近似系の持つ固有円振動数を求める。ただしここでは等分割を前提としている。次に、逐次時間積分法の時間積分オペレータに対して適用される伝達関数の特性根による誤差評価法[4]と類似の考え方を、空間積分オペレータとしてここで定義する離散化漸化式に適用し、得られる周波数特性によって離散化誤差を評価する。

3．棒の縦振動問題を対象とした固有円振動数精度評価式の誘導　次式で表される棒の非減衰自由縦振動問題を考える。ここで、$C_0^2=E/\rho$、E：縦弾性係数、ρ：単位体積質量、A：断面積、U（x，t）：軸方向変位であり、材料定数は一定とする。また、（¨）および（″）は各々時間t（≧0）と座標x（0≦x≦L）についての2階微分を表す。

$$\rho A\ddot{U}(x,t)=\rho A C_0^2\,U''(x,t) \tag{1}$$

2次のラグランジュ補間関数を形状関数とし整合質量を用いたモデルを例に取り、近似系の固有円振動数を求める。長さhの要素により空間領域が等分割された規則的な有限要素の集合を考えると、非減衰自由振動の運動方程式は式（2）のようになる。ただし、$u_j=U(jh,t)$を表す。

$$\frac{\rho A h}{30}\begin{bmatrix}\cdot&&&&&&\\&\cdot&&&&&\\&&2&16&2&&\\&-1&2&8&2&-1&\\&&2&16&2&&\\&&&&&\cdot&\\&&&&&&\cdot\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\cdot\\\ddot{u}_{j-2}\\\ddot{u}_{j-1}\\\ddot{u}_{j}\\\ddot{u}_{j+1}\\\ddot{u}_{j+2}\\\cdot\end{Bmatrix}+\frac{EA}{3h}\begin{bmatrix}\cdot&&&&&&\\&\cdot&&&&&\\&&-8&16&-8&&\\&1&-8&14&-8&1&\\&&-8&16&-8&&\\&&&&&\cdot&\\&&&&&&\cdot\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\cdot\\u_{j-2}\\u_{j-1}\\u_{j}\\u_{j+1}\\u_{j+2}\\\cdot\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\cdot\\0\\0\\0\\0\\0\\\cdot\end{Bmatrix} \tag{2}$$

ここで第n次の有限要素解を式（3）のように複素指数関数で仮定し式（2）に代入すると、境界部分を除いて式（4）および（5）に示す各々外節点uj および内節点uj+1 （図1参照）に関する運動方程式に対応する2種の離散化漸化式が得られる。ここに＊を付した諸量は近似解を表す。

$$u_n^*(jh,t) = C_n(\omega_n^* t)\ \exp[i\phi_n^* jh] = C_n(\omega_n^* t)\ \exp[i(\omega_n^*/C_0^*)\ jh] \tag{3}$$

$$(10E+\rho h^2\omega_n^{*2})(u_{j-2}+u_{j+2}) - 2(40E+\rho h^2\omega_n^{*2})(u_{j-1}+u_{j+1}) + 4(35E-2\rho h^2\omega_n^{*2})u_j=0 \tag{4}$$

$$-2(40E+\rho h^2\omega_n^{*2})(u_j+u_{j+2}) + 16(10E-\rho h^2\omega_n^{*2})u_{j+1}=0 \tag{5}$$

これらの式から内節点uj-1 およびuj+1 の項を消去すると、外節点のみで構成された離散化漸化式（6）が得られる。これをωn*に関して解けば近似系の第n次の固有円振動数が式（7）のように求まる。これが求める固有円振動数精度評価式である。ただし、ωn ＝C。φn は対応する理論解である。

$$[(40E+\rho h^2\omega_n^{*2})^2 - 4(10E-\rho h^2\omega_n^{*2})(10E+\rho h^2\omega_n^{*2})](u_{j-2}+u_{j+2})$$
$$+[2(40E+\rho h^2\omega_n^{*2})^2 - 16(10E-\rho h^2\omega_n^{*2})(35E-2\rho h^2\omega_n^{*2})]u_j = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\omega_n^*}{\omega_n}=\frac{1}{\phi_n h}\sqrt{\frac{-4(2\cos\phi_n h+13)\pm 4\sqrt{-11\cos^2\phi_n h+112\cos\phi_n h+124}}{(\cos\phi_n h-3)}}\quad [0\leq\phi_n h\leq 2\pi] \tag{7}$$

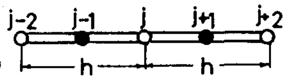

図1　ラグランジュ2次式モデルの内節点・外節点

ラグランジュ型の形状関数を仮定した要素では隣接する3節点、エルミート型の形状関数を仮定した要素では2節点が、各々相対変位することにより表される振動モードが近似系の最高次の振動モードであり。このためφn* h は次式のように与えられる。ここでλn*：第n次の波長、Tn*：第n次の固有周期である。

$$\phi_n^* h = (\omega_n^*/C_0^*)h = (2\pi/T_n^*)(T_n^*/\lambda_n^*)h = 2\pi h/\lambda_n^* \tag{8}$$

式（8）より、ラグランジュ2次式要素では、φn* h が［0≦φn* h≦2π］の範囲、一般的にはラグランジュn次式要素では［0≦φn* h≦nπ］、エルミートn次式要素では［0≦φn* h≦(n－1)π］、にあることがわかる。

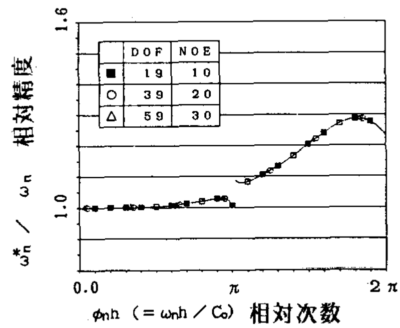

図2　ラグランジュ2次式整合質量モデルの固有振動数の精度

__4．数値実験結果__　両端固定の境界条件の場合に対して、要素分割数を10、20および30と変化させたときに式（2）の固有値解析より求まる近似固有円振動数の理論解に対する比を 図2 に示す。横軸のφn h は各分割モデルが表し得る最大振動次数で無次元化した振動次数である。これらの結果は図中に実線で示した式（7）の理論精度評価式と良く一致しており、精度評価式の妥当性が確認できる。なお、式（7）において平方根記号内の複号のうち正が低次側の式を与え、負は高次側の式を与える。

__5．おわりに__　離散化誤差に起因する見掛け上の高次振動を、恰も実際の現象であるかのごとく取り扱っている例もみうけられるが、ここで提案したような固有振動数精度評価式により、現象の卓越モードを十分な精度で近似するために必要となる要素分割数の目安が得られるものと考える。なお、ここでは一例のみを示したが、集中質量モデルを含めて精度評価式は全て無次元化振動次数φn h の関数として与えられ、ラグランジュn次の有限要素ではn－1個、自由度の縮小を行わないエルミートn次の有限要素では（n－1）／2個の不連続点を境にして、固有円振動数の精度が大きく変化することが理論的に確かめられている。また、境界条件の影響についてははりの曲げ振動問題を対象として検討しており、全次数を半分に分けた場合の高次側で精度評価式は数値実験結果とずれてくるものの、要素分割数を増すにしたがい境界条件の影響が少なくなる結果を得ている。

［参考文献］1)増田陳紀、西本哲也、西脇威夫、皆川　勝：有限要素法による1次元動的応答解析における離散化誤差の一検討、第8回マトリックス解析法研究発表論文集、pp.43-48、1983. 2)Strang,G.and Fix,G.J.（三好哲彦・藤井宏共訳）：有限要素法の理論、pp.186-194、培風館,1976. 3)Walz,J.E.,Fulton,R.E.,Cyrus,N.J.and Eppink,R.J.:Accuracy of Finite Element Approximation to Structural Problems,NASA TN D-5728,1970. 4)清水信行、本間美知枝、山本鎮男、渡辺嘉二郎、嶋田健司：大次元常微分方程式の直接数値積分法（積分法の評価と選定基準）、日本機械学会論文集（C編）、46巻、401号、1977. 5)増田陳紀、西脇威夫、皆川　勝、松尾和則：有限要素法における離散課誤差の理論的評価手法について、第10回構造工学における数値解析法シンポジウム論文集、1986.