

1. はじめに 本報告では、材料内に内在する欠陥を球形と仮定し、無限個の周期的配置を有する球状欠陥による弾性波の反射・透過特性を明らかにすることを試みる。解析上の要点は次の2点にある：

- 1) 欠陥配置の周期性を利用して、unit cell に対するグリーン関数を作成する。
- 2) 反射・透過係数の決定には、この unit cell に相反定理を応用する。

なお、解析は3次元動弾性解析である。

2. 問題の記述と波動場の特性 Fig. 1 に示すように、半径 d の球状欠陥が x_1x_2 平面にその原点を有するように周期的に配置されている場合を考える。入射波は x_1x_3

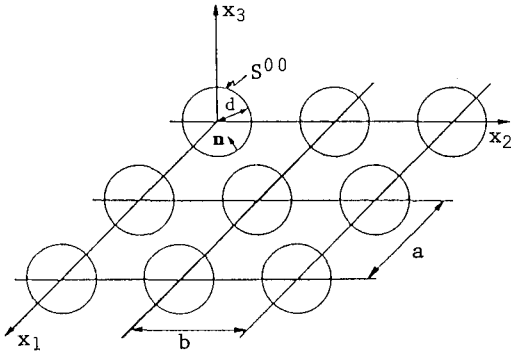


Fig.1 Array of spherical cavities with centers in x_1x_2 - plane

平面に伝播ベクトルを持つ平面波とする。定常状態を仮定すれば、母体内における変位に対する基礎式は

$$\Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \cdot u + \rho \omega^2 u = 0 \quad (1)$$

となる。なお、球の表面は表面力 free である：

$$t(x) = \lambda \nabla \cdot u + \mu \nabla u = 0, \quad x \in S^{nn} \quad (2)$$

ここに、球表面 S^{nn} は次のように表示できる

$$(x_1 - na)^2 + (x_2 - nb)^2 + x_3^2 = d^2, \quad -\infty < m, n < \infty \quad (3)$$

また、入射波は次のような平面P波と仮定する

$$u^i(x) = p \exp(i k_L p \cdot x), \quad (4)$$

ここに $p = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$ 。 (5)

入射波の伝播ベクトル p は x_1x_3 面にあり、かつ、球状欠陥は全 x_1 軸に沿って配置されているので、散乱波 u^s を次のように仮定することができる

$$u^s(x) = \bar{u}^s(x) \exp(i k_L x_1 \sin \theta). \quad (6)$$

また、境界条件 (2) 及び球状欠陥配置の x_1, x_2 軸に関する周期性より、散乱場 $\bar{u}^s$ は次のような周期性を持つ

$$\bar{u}^s(x_1 + a, x_2 + b, x_3) = \bar{u}^s(x_1, x_2, x_3). \quad (7)$$

式 (6), (7) を満たす散乱波 u^s はポテンシャル ϕ, ψ を用いて次のように書くことができる

$$u_i^s = \phi_i + e_{ij} \psi_{j,j}, \quad (8)$$

ここに

$$\phi^\pm = \sum_{p,q} \bar{\phi}_{pq}^\pm \exp i(\alpha_p^\pm x_1 + \beta_q^\pm x_2 \pm \gamma_{pq}^\pm x_3) \quad (9)$$

$$\psi_{pq}^\pm = \sum_{p,q} \bar{\psi}_{pq}^\pm \exp i(\alpha_p^\pm x_1 + \beta_q^\pm x_2 \pm \gamma_{pq}^\pm x_3) \quad (10)$$

(ϕ^+, ψ_{pq}^+ は $x_3 > 0$ で、 ϕ^-, ψ_{pq}^- は $x_3 < 0$ で適用される)。式 (9), (10) において

$$\left. \begin{aligned} \alpha_p^\pm &= k_L \sin \theta + 2p\pi/a, & \alpha_p^\mp &= k_T \sin \theta + 2p\pi/a \\ \beta_q &= 2q\pi/b \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{pq}^\beta &= [k_\beta^2 - (\alpha_p^\beta)^2 - (\beta_q)^2]^{1/2} \quad (\beta = L, T) \\ \text{Im } \gamma_{pq}^\beta &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

であり、(11) 式における k_L と k_T は次式を満足する

$$k_L \sin \theta = k_T \sin \theta_T. \quad (13)$$

また、式 (9), (10) において、各 (p, q) 項は波動モードの (p, q) 成分を表し、 $+\gamma_{pq}^\beta x_3$ を持つ成分は透過波を、 $-\gamma_{pq}^\beta x_3$ を持つ成分は反射波を意味する。 $p=q=0$ に対しては γ_{00}^L , γ_{00}^T 共に実数であり、対応するモードはすべての周波数に対して伝播波となる。以後、これを0次波動モードと呼ぶ。 $k_L < k_T$ であるので、下記の周波数帯

$$k_T = \omega/c_T < \min_{p,q} [(\alpha_p^\beta)^2 + (\beta_q)^2]^{1/2}, \quad (\beta = L, T) \quad (14)$$

においては、0次波動モードのみが伝播波となり、他の波動モードは幾何学的な意味で減衰波となる。

3. 0次波動モードと反射・透過係数 以後、式 (14) に示された周波数帯を考える。この周波数帯においては、 $x_2 = nb$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 面に対する対称性により、 x_2 軸方向に偏るS波成分 (いわゆるSH成分) はないことがわかる。これより、0次波動モードに対する全変位場 $u = u^T + u^S$ の表現は次のようになる：

$x_3 > 0$ に対し

$$u_+^L(x) = p (1 + i k_L \bar{\alpha}_+^0) \exp(i k_L p \cdot x) \quad (15)$$

$$u_+^T(x) = q (1 + i k_T \bar{\alpha}_+^0) \exp(i k_T p \cdot x) \quad (16)$$

$x_3 < 0$ に対し

$$u^L(x) = p \exp(ik_L p \cdot x) + p i k_L \varphi_{-}^{\infty} \exp(ik_L p \cdot x) \quad (17)$$

$$u^T(x) = q - i k_T \varphi_{-}^{\infty} \exp(ik_T p \cdot x) \quad (18)$$

ここに、 p は式(5) に定義されており、また

$$\left. \begin{aligned} d_{\pm} &= (\mp \cos \theta_T, 0, \sin \theta_T) \\ p_{\pm}^{\pm} &= (\sin \theta_T, 0, \pm \cos \theta_T) \\ p_{-} &= (\sin \theta, 0, -\cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

である。式(15)-(18)において、 u^L は縦波成分を、 u^T は横波成分を表す。

ここで、式(15)-(18)における係数 $\varphi_{\pm}^{\infty}$, $\varphi_{\pm}^{\infty}$ を決めるために、Fig.2 に示すような $|x_1| \leq a/2$, $|x_2| \leq b/2$, $-\infty < x_3 < \infty$ で定義される unit cell を考える。この unit cell に対し、相反定理は次のように書ける

$$\int_S (u^B \cdot \dot{t}^A - u^A \cdot \dot{t}^B) ds = 0, \quad (20)$$

ここに

$$S = S_1^+ + S_2^+ + S_3^+ + S^{\infty}, \quad (21)$$

いま、 $\{u^A, \dot{t}^A\}$ として式(15)-(18) に示された実系を (S_1^+ 上)、 $\{u^B, \dot{t}^B\}$ として次のような仮想系を考える

$$u_R^{BL} = -p \exp(-ik_L p \cdot x) \quad (22)$$

$$u_T^{BL} = -p \exp(-ik_T p \cdot x) \quad (23)$$

$$u_R^{BT} = -q \exp(-ik_T p \cdot x) \quad (24)$$

$$u_T^{BT} = -q \exp(-ik_T p \cdot x). \quad (25)$$

これら仮想系は、0 次の反射及び透過縦(L)、横(T) 波に対し、それぞれ、位相及び伝播方向が共に逆になるように選ばれている。実系Aとして式(15)-(18) を、仮想系Bとして式(22)を相反定理(20)に代入すると次式を得る

$$\begin{aligned} & -2(\lambda + 2\mu) ab (ik_L)^2 \cos \theta \varphi_{-}^{\infty} \\ & - \int_{S^{\infty}} u^A \cdot \dot{t}_R^{BL} ds = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

ここに、 $\dot{t}_R^{BL}$ は(22)式の u_R^{BL} に対応する S^{∞} 上の表面

力である。いま、縦波に対する反射係数 R^L を

$$R^L = ik_L \varphi_{-}^{\infty} \quad (27)$$

と定義すると、 R^L は次のように書ける

$$R^L = -F_L \int_{S^{\infty}} u^A \cdot \dot{t}_R^{BL} ds, \quad (28)$$

ここに

$$F_L = 1 / \{2 ik_L (\lambda + 2\mu) ab \cos \theta\}. \quad (29)$$

同様に、縦波に対する透過係数 T^L 、横波に対する反射及び透過係数 R^T 及び T^T を次のように定義すれば

$$T^L = 1 + ik_L \varphi_{+}^{\infty} \quad (30)$$

$$R^T = ik_T \varphi_{-}^{\infty}, \quad T^T = ik_T \varphi_{+}^{\infty}, \quad (31)$$

これら T^L, R^T, T^T は次のように書ける

$$T^L = 1 - F_L \int_{S^{\infty}} u^A \cdot \dot{t}_T^{BL} ds \quad (32)$$

$$R^T = -F_T \int_{S^{\infty}} u^A \cdot \dot{t}_R^{BT} ds \quad (33)$$

$$T^T = -F_T \int_{S^{\infty}} u^A \cdot \dot{t}_T^{BT} ds, \quad (34)$$

ここに

$$F_T = 1 / \{2 ik_T \mu ab \cos \theta_T\}. \quad (35)$$

式(28), (32)-(34)において、 R^L, T^L, R^T, T^T 表現における未知量 u^A は、Fig.2 に示した unit cell に対するグリーン関数を用いて、単一球面上の境界積分方程式を解くことにより得られる。

4. 結果 結果の一例を Fig.3 に示す。この場合、入射波は入射角を $\theta = 30^\circ$ とする縦波であり、球の半径 d で無次元化した縦波の波数 $k_L d$ に対し R^L, T^L, R^T, T^T の絶対値を式(14)の周波数に対してプロットしてある。また、この結果はエネルギー関係

$$|R^L|^2 + |T^L|^2 + (1 - \sin^2 \theta / \kappa^2)^{1/2} [|R^T|^2 + |T^T|^2] / \kappa \cos \theta = 1 \quad (36)$$

($\kappa = k_T / k_L$) を最大3%の誤差で満足する。

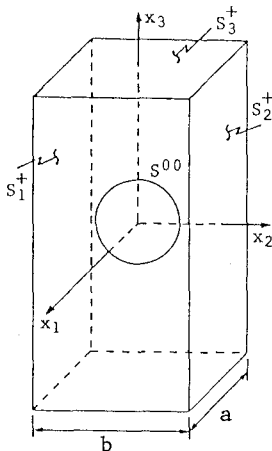


Fig.2 Unit cell for application of reciprocal identity

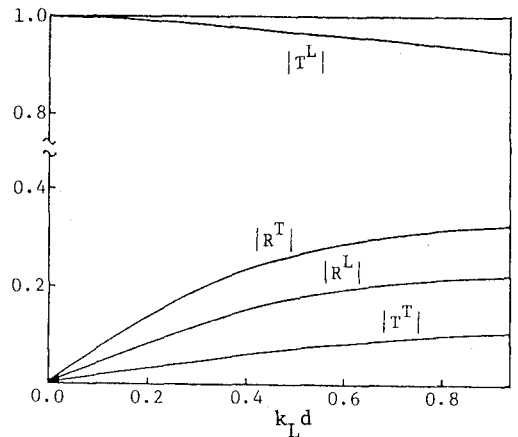


Fig.3 Reflection and transmission coefficients for $\theta = 30^\circ$