

I-7

変位をフーリエ級数展開した高次はり理論

福島工業高等専門学校 正員 根岸嘉和
山梨大学工学部 正員 平島健一

① 緒言 本報告では、平面応力状態にあるはりの曲げ解析理論をフーリエ級数展開を用いた変位仮定に基づいて構築し、本理論と他の諸理論との関係を示すとともに、数値例を通じてこの種の変位仮定に基づく高次はり理論の精度特性について考察する。

② 理論式の誘導

②-1 基本仮定と理論の定式化

Fig.1 に示すようなはりにおける変位を高工方向座標に関してフーリエ級数展開し、次式で仮定する。

$$u_j = \sum_{k=0}^{\infty} u_{jk}^{(k)} \cos \frac{k\pi}{2} \xi + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_{jk}^{(k)} \sin \frac{k\pi}{2} \xi$$

$$(j = x, z; \xi = z/c) \quad (1)$$

これらを、最小ポテンシャルエネルギーの原理に用いることにより、次式のような高次断面力のつり合い式と境界条件式とを得る。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xj,x}^{(m)} + \left(\frac{m\pi}{2c}\right) \hat{\sigma}_{xj}^{(m)} + \frac{1}{c} F_j^{(m)} &= 0, \\ \hat{\sigma}_{xj,x}^{(m)} - \left(\frac{m\pi}{2c}\right) \sigma_{xj}^{(m)} + \frac{1}{c} \hat{F}_j^{(m)} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij}^{(m)} \\ \hat{\sigma}_{ij}^{(m)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_{ij}^{(m)} \\ \hat{\bar{\sigma}}_{ij}^{(m)} \end{array} \right\} \text{ or } \left\{ \begin{array}{l} u_j^{(m)} \\ \hat{u}_j^{(m)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_j^{(m)} \\ \hat{\bar{u}}_j^{(m)} \end{array} \right\} \text{ at } x = \pm l$$

$$(3)$$

where

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij}^{(m)} \\ \hat{\sigma}_{ij}^{(m)} \end{array} \right\} = c \int_{-1}^1 \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{m\pi}{2} \xi \\ \sin \frac{m\pi}{2} \xi \end{array} \right\} d\xi, \left\{ \begin{array}{l} F_j^{(m)} \\ \hat{F}_j^{(m)} \end{array} \right\} = \left[n \right]_{ij} \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{m\pi}{2} \xi \\ \sin \frac{m\pi}{2} \xi \end{array} \right\} \Big|_{\xi=\pm 1} \quad (4)$$

一方、幾何学的条件式と構成関係式を用い応力成分を変位係数で表わすと、等方性ばりの場合は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= K \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ u_{x,x}^{(k)} + \nu \beta_k \hat{u}_x^{(k)} \right\} \cos \frac{k\pi}{2} \xi \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \hat{u}_{x,x}^{(k)} - \nu \beta_k u_x^{(k)} \right\} \sin \frac{k\pi}{2} \xi \right], \\ \sigma_{zz} &= K \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \nu u_{x,x}^{(k)} + \beta_k \hat{u}_z^{(k)} \right\} \cos \frac{k\pi}{2} \xi \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \nu \hat{u}_{x,x}^{(k)} - \beta_k u_z^{(k)} \right\} \sin \frac{k\pi}{2} \xi \right], \\ \sigma_{xz} &= G \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \beta_k \hat{u}_x^{(k)} + u_{z,x}^{(k)} \right\} \cos \frac{k\pi}{2} \xi \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \beta_k u_x^{(k)} - \hat{u}_{z,x}^{(k)} \right\} \sin \frac{k\pi}{2} \xi \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに $K = E/(1-\nu^2)$, $G = E/2(1+\nu)$, $\beta_k = (k\pi/2c)$ であり E はヤング率, ν はポアソン比を表わす。

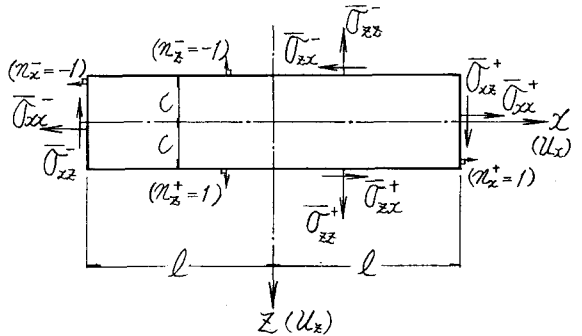


Fig.1 Geometry of beam and surface tractions.

式(5)を式(2), (4)に代入することにより式(1)で仮定した変位係数の支配方程式が得られる。たとえば、上表面に下向きに p なる荷重が作用した場合の n 次理論の曲げ挙動の支配式は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left[C_m^k G u_{z,xx}^{(k)} - S_m^k K \beta_k / \beta_k u_z^{(k)} \right. \\ \left. + \{ C_m^k G \beta_k + (1 - \delta_{k0}) S_m^k \nu K \beta_k \} \hat{u}_{x,x}^{(k)} \right] = \hat{\sigma}_m^{(-1)} \frac{p}{c}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \left[(1 - \delta_{k0}) S_m^k K \hat{u}_{x,xx} - C_n^k G \beta_k / \beta_k \hat{u}_x^{(k)} \right. \\ \left. - \{ S_m^k \nu K \beta_k + C_n^k G \beta_k \} u_{z,x}^{(k)} \right] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

上式中の δ_{mn} はクロネッカーの δ であり C_m^k , S_m^k , δ_m はそれぞれ次式で与えられる量である。

$$\left\{ \begin{array}{l} C_m^k \\ S_m^k \end{array} \right\} = \int_{-1}^1 \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{k\pi}{2} \xi \cos \frac{m\pi}{2} \xi \\ \sin \frac{k\pi}{2} \xi \sin \frac{m\pi}{2} \xi \end{array} \right\} d\xi, \quad \delta_m = \frac{1 + (-1)^m}{2} \quad (7)$$

このように、上下対称な構造をもつはりでは $\hat{u}_z^{(n)}$ と $u_z^{(m)}$ が曲げ挙動を表わし、残る $u_x^{(k)}$ と $\hat{u}_x^{(n)}$ が伸縮挙動を表わすことになり、両者は互いに連成しない。

②-2 上下表面での境界(荷重)条件の考慮

以上の定式化においては高工方向応力が上下表面での境界条件を満足しないため、それらを満足させる方法を2つ示す。その1つは δ_m の理論で用いられたつり合い法の考えに従って、求められた曲げ応

カとのフリ合いを満足する高き方向応力を境界条件を考慮して求め直すもので、たとえば σ_{xz} は次式となる。

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz} = & K \left\{ \frac{c^2}{2} (5-1) u_{x,xxx}^{(0)} \right. \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \beta_k^2 u_{x,xxx}^{(k)} + \beta_k' \hat{u}_{x,xx}^{(k)} \right\} \left\{ \cos \frac{k\pi}{2} 5 - \cos \frac{k\pi}{2} \right\} \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \beta_k^2 \hat{u}_{x,xxx}^{(k)} - \beta_k' u_{x,xx}^{(k)} \right\} \left\{ \sin \frac{k\pi}{2} 5 - \sin \frac{k\pi}{2} \right\} \Big\} \\
 & + \frac{p}{2} (5-1) \quad \text{----- (8)}
 \end{aligned}$$

他の1つは、Mengiの理論²⁾で用いられている考え方と同等で、上下表面での境界条件を支配式としてフリ合い式と連立させて解くもので、たとえば曲げモーメントに式(6)と連立させるべき支配式は次式である。

$$\begin{cases} G \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \beta_k \hat{u}_x^{(k)} + u_{x,x}^{(k)} \right\} \cos \frac{k\pi}{2} = 0 \\ K \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \nu \hat{u}_{x,x}^{(k)} - \beta_k u_x^{(k)} \right\} \sin \frac{k\pi}{2} = \frac{p}{2} \end{cases} \quad \text{----- (9)}$$

③ 本理論と他の諸理論との関係

本理論は本質的には着者の平板理論のうち変位を $u_j = \sum_{k=0}^{\infty} u_j^{(k)} \cos \frac{k\pi}{2} (1-z) + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_j^{(k)} \sin \frac{k\pi}{2} (1-z)$ のように仮定した理論¹⁾をほりに適用したものと同等であるが、そのような展開法はLeeらのフーリエ $\cos$ 展開理論⁴⁾ ($u_j = \sum_{k=0}^{\infty} u_j^{(k)} \cos \frac{k\pi}{2} (1-z)$) の不完全性を補う目的も持って採用したものであり、この場合は曲げと伸縮が連成しない時でも支配式に双方に $\hat{u}_x^{(k)}$, $u_x^{(m)}$ と $u_x^{(m)}$, $\hat{u}_x^{(m)}$ の全種の成分が交互に入るため、式が多少複雑になるが、本理論では前述の通り前者と後二者とが完全に分離して明瞭である。なおLeeらの理論およびBoggy⁵⁾の理論の手法は本理論において $u_j^{(0)}$, $\hat{u}_j^{(1)}$, $u_j^{(2)}$, $\hat{u}_j^{(3)}$, ... のみを採用したものに相当する。

④ 数値計算例

Fig. 2~4に上表面に荷重 $p = p_0 \sin \frac{\pi}{2} x$ を受ける無限ばりの解析結果を示す。Fig. 2は変位 u_z の高き方向分布の各次数の理論ごとの比較であり、Fig. 3は応力 σ_{xz} について境界条件を満足しない解と前述の2手法により満足させた解とを比較したものである。最後にFig. 4は最大曲げ応力 $|\sigma_{xz}|_{\max}$ の各次数の理論による解の厳密解への収束状況をいくつかの形状比 ($2c/L$) について比較したものである。これらより本理論の解析精度特性の一端を知ることができる。

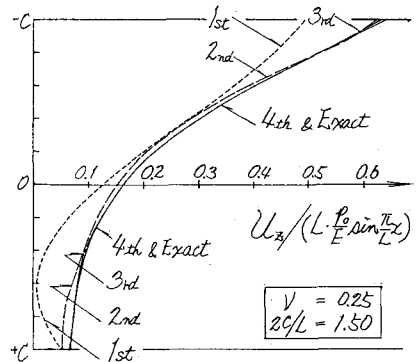


Fig. 2 Distributions of u_z along the height.

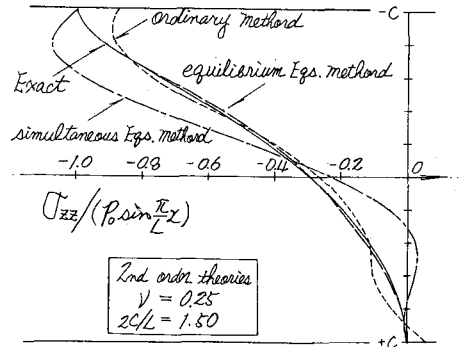


Fig. 3 Distributions of σ_{xz} along the height.

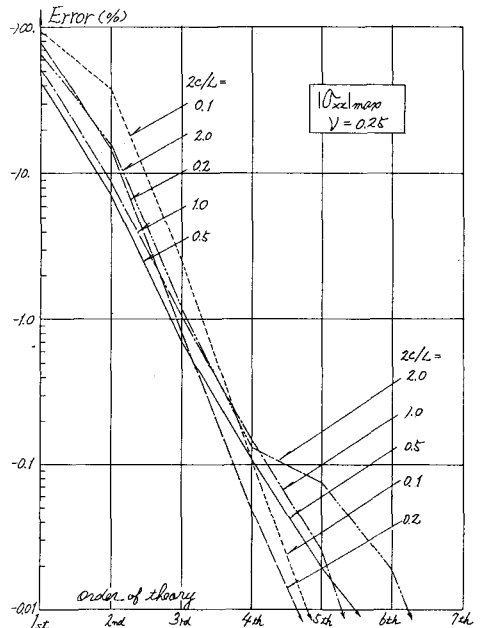


Fig. 4 Errors of $|\sigma_{xz}|_{\max}$ according to various theories.

- REFERENCES** 1) Lo, K.H., Christensen, R.M. & Wu, E.M. : Int. J. Solids Struct. Vol.14, pp.655-662, 1978. 2) Mengi, Y. : Int. J. Solids Struct. Vol. 16, pp.1155-1168, 1980. 3) Hirashima, K. & Negishi, Y. : Proc. JSCE No.341, pp.163-172, 1984. 4) Lee, P.C.Y. & Nikodem, Z. : Int. J. Solids Struct., Vol.8, pp.581-612, 1972. 5) Boggy, D.B. & Bugdayci, N. : Int. J. Solids Struct. Vol.17, pp.1159-1178, 1981.