I-6　非定常熱弾性特性を考慮した平板の高次理論と連成熱振動解析

呉工業高等専門学校　○正員　丸上晴朗
山梨大学　工学部　正員　平島健一

1. 緒 言

修正Fourier法則を用いた連成熱伝導方程式と3次元動熱弾性基礎式を出発点にして，変位・応力の力学場と温度場との連成を考えた平板理論の定式化を一般化高次理論を用いて行い，2次元化された支配式を誘導する．本報においては変位，温度等の物理量を板厚方向座標zのべき級数とFourier級数との二通りに級数展開した場合について，高次理論の適用法とその解析過程を述る．計算例としては，まず第一段階として求められた平板の支配式を限定した状態で考え，支配式中の奥行方向の成分（y方向成分）及び$\frac{\partial}{\partial y}(\ )$に関する項をすべて削除すれば，はりの動熱弾性支配式が得られるので，ここではばりの場合について考えることとする．

2. 修正Fourier法則と3次元動熱弾性の基礎式

○修正Fourier法則：　$\tau_0 \dot{q}_i + q_i = -\kappa_{ij} T_{,j}$ ･････････････････････(1)

q_iは熱流束ベクトルのi方向成分，Tは基準絶対温度T_0からの温度変化，κ_{ij}は2階の対称な熱伝導率テンソル，τ_0は緩和時間であり，このτ_0を零と置いたものが従来までの古典的なFourier法則である．なおi，j，k，…等はx，yまたはzを，α，β，…等はxまたはyをとり，テンソルの和の規約を採用する．

○エネルギー方程式：　$-q_{i,i} + \rho g = \rho C_v \dot{T} - T_0 \hat{\beta}_{ij} \dot{u}_{i,j}$ ･････････････････････(2)

ρは密度，C_vは等積比熱，gは単位質量当りの熱源，$\dot{u}_i$は変位速度ベクトルのi成分，$\hat{\beta}_{ij}$は熱定数である．

○Duhamel－Neumannの構成方程式：　$\tau_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \hat{\beta}_{ij} T$ ･････････････････････(3)

C_{ijkl}は弾性定数，τ_{ij}およびε_{kl}はそれぞれ応力およびひずみのテンソルである．

○ひずみ・変位関係式：　$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k})$ ･････････････････････(4)

熱的ならびに弾性的に等方性の場合C_{ijkl}，$\hat{\beta}_{ij}$は次のようになる．

$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$，$\hat{\beta}_{ij} = (3\lambda + 2G)\hat{\alpha}\delta_{ij}$，$\kappa_{ij} = \kappa\delta_{ij}$ ･････････････(5)

$\hat{\alpha}$は熱膨張係数，κは熱伝導率，λ，Gは$Lam\acute{e}$の定数である．

3. 一般化高次理論としての支配式の誘導[1,2)]

3.1. 物理量を板厚方向座標zのべき級数に展開する場合

前節に示した関係式をFig.1のような平板問題に適用するために，zに関するべき級数に展開して各物理量を表わす．

$$(u_i, q_i, T, g) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n (u_i^{(n)}, q_i^{(n)}, T^{(n)}, g^{(n)}) \quad \cdots\cdots(6)$$

$u_i^{(n)}$，$q_i^{(n)}$等はx，yおよびtのみの関数である．

式(1)，(2)に式(6)を代入し，両辺へz^nを掛け板厚にわたって積分するとそれぞれ次式のようになる．

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\tau_0^{(m,n)}\dot{q}_i^{(m)} + B_{mn} q_i^{(m)} + \kappa_{i\alpha}^{(m,n)} T_{,\alpha}^{(m)} + (m+1)\kappa_{iz}^{(m,n)} T^{(m+1)}\right\} = 0 \quad \cdots\cdots(7)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[-B_{mn}\left\{q_{\alpha,\alpha}^{(m)} + (m+1) q_z^{(m+1)}\right\} + \rho^{(m,n)} g^{(m)}\right] = \sum_{m=0}^{\infty}\left[(\rho C_v)^{(m,n)}\dot{T}^{(m)} - T_0\left\{\hat{\beta}_{i\alpha}^{(m,n)}\dot{u}_{i,\alpha}^{(m)} + (m+1)\hat{\beta}_{iz}^{(m,n)}\dot{u}_i^{(m+1)}\right\}\right] \quad \cdots\cdots(8)$$

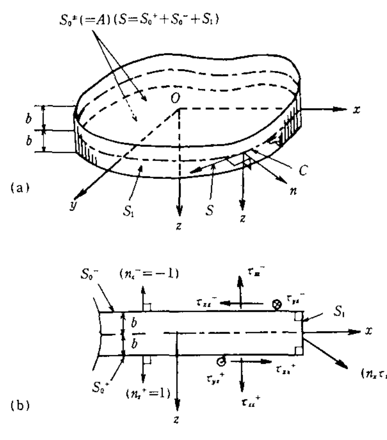

Fig. 1　Geometory of plate and surface tractions.

ここに，$B_{mn} = \int_{-b}^{b} z^{n+m} dz = \frac{b^{n+m+1}}{n+m+1}\left\{1 + (-1)^{n+m}\right\}$ ･････････････････････(9)

$$\left[\rho^{(m,n)}, (\rho C_v)^{(m,n)}, \tau_0^{(m,n)}, \kappa_{ij}^{(m,n)}\right] = \int_{-b}^{b} z^{n+m}\left[\rho, \rho C_v, \tau_0, \kappa_{ij}\right] dz \quad \cdots\cdots(10)$$

次に変位，応力の場を支配する2次元化支配式を導出するために次のHamilton原理の式を考える．

$$\delta\int_{t_0}^{\hat{t}} dt \int_V (\tilde{T}-U)\,dV + \int_{t_0}^{\hat{t}} dt \left\{ \int_S t_j\, \delta u_j\, dS + \int_V f_j\, \delta u_j\, dV \right\} = 0 \qquad \text{-------(11)}$$

t_jは表面力，f_jは単位体積当りの物体力，$\tilde{T}$およびUはそれぞれ単位体積当りの弾性体に蓄えられる運動エネルギーおよびひずみエネルギーである．これらは次式で与えられる．n_iはFig.1のように定める．

$$\tilde{T} = \frac{1}{2}\rho \dot{u}_j \dot{u}_j, \quad U = \frac{1}{2}\tau_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad t_j = n_i \tau_{ij} \qquad \text{-------(12)}$$

式(6)を式(12)，(11)へ代入し変分を行って整理すると次の場の支配方程式と境界条件式が得られる．

○支配方程式 ：
$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big[\Big\{ C_{\alpha j\beta l}^{(m,n)} u_{l,\alpha\beta}^{(m)} + (m+1) C_{\alpha jzl}^{(m,n)} u_{l,\alpha}^{(m+1)} + \hat{\beta}_{\alpha j}^{(m,n)} T_{,\alpha}^{(m)} \Big\} - n\Big\{ C_{zj\beta l}^{(m,n-1)} u_{l,\beta}^{(m)} + (m+1) C_{zjzl}^{(m,n-1)} u_l^{(m+1)} + \hat{\beta}_{zj}^{(m,n-1)} T^{(m)} \Big\}\Big] + F_j^{(n)} + f_j^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^{(m,n)} \ddot{u}_j^{(m)} \qquad \text{-------(13)}$$

ここに，$F_j^{(n)} = b^n\{\tau_{zj}^{+} - (-1)^n \tau_{zj}^{-}\}$，$f_j^{(n)} = \int_{-b}^{b} z^n f_j\, dz$，$(C_{ijkl}^{(m,n)}, \hat{\beta}_{ij}^{(m,n)}) = \int_{-b}^{b} z^{n+m}(C_{ijkl}, \hat{\beta}_{ij})\, dz$ である．

○境界条件式 ： $\overset{*}{T}_j^{(n)} \equiv \int_{-b}^{b} z^n (n_\alpha \tau_{\alpha j})_c\, dz = n_\alpha \tau_{\alpha j}^{(n)}$，または $\bar{u}_j^{(n)} = u_j^{(n)}$ -------(14)

3.2. 物理量を板厚方向座標zに関するFourier級数に展開する場合

$$(u_i, q_i, T, g) = \sum_{n=0}^{\infty}(u_i^{(n)}, q_i^{(n)}, T^{(n)}, g^{(n)}) \cos\frac{n\pi}{2}(1-\eta) + \sum_{n=1}^{\infty}(\hat{u}_i^{(n)}, \hat{q}_i^{(n)}, \hat{T}^{(n)}, \hat{g}^{(n)}) \sin\frac{n\pi}{2}(1-\eta) \qquad \text{----(15)}$$

ここに，$\eta = \frac{z}{b} = \frac{2z}{h}$，（$h=2b$：板厚），$u_i^{(n)}$，$\hat{u}_i^{(n)}$，‥‥等はすべて$x$，$y$および$t$のみの関数である．

式(1)，(2)に式(15)を代入し，両辺に$\cos\frac{n\pi}{2}(1-\eta)$，$\sin\frac{n\pi}{2}(1-\eta)$を掛け板厚にわたって積分すると式(7)，(8)に対応する支配方程式が得られる．以下，前項の場合と同様な操作を実行すると式(13)，(14)に対応する支配方程式と境界条件式が得られるが紙面の都合上省略する．

4. 単純支持ばりの連成熱振動解析

支配式(7)，(8)，(13)および3.2.の場合のこれらに対応する支配式は等質性の場合には，共に面内（伸縮）挙動の支配方程式系と面外（曲げ）挙動のそれとに互に分離される．このことを利用し，さらに等方性の条件（この場合(5)が成立する）をつけて，はりの面外挙動すなわち曲げ振動解析を行う．べき級数展開の場合とFourier級数展開の場合に分けて考える．

4.1. 物理量を板厚方向座標zのべき級数に展開する場合

いま式(6)の物理量をz^3の項までの式で近似した場合（3rd-Order）の具体的な式は，支配方程式系が分離されることを考慮すると，次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} &u_x = z u_x^{(1)} + z^3 u_x^{(3)},\quad u_z = u_z^{(0)} + z^2 u_z^{(2)},\quad q_x = z q_x^{(1)} + z^3 q_x^{(3)},\quad q_z = q_z^{(0)} + z^2 q_z^{(2)},\\ &T = zT^{(1)} + z^3 T^{(3)},\quad g = z g^{(1)} + z^3 g^{(3)}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{-------(16)}$$

式(7)，(8)，(13)から3rd-Orderの場合について支配式を求め，等質・等方性条件を設定すれば，面外挙動の支配式は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} &\tau_0 \dot{q}_x^{(1)} + q_x^{(1)} + kT_{,x}^{(1)} = 0,\quad \tau_0 \dot{q}_x^{(3)} + q_x^{(3)} + kT_{,x}^{(3)} = 0,\quad \tau_0 \dot{q}_z^{(0)} + q_z^{(0)} + kT^{(1)} = 0,\quad \tau_0 \dot{q}_z^{(2)} + q_z^{(2)} + 3kT^{(3)} = 0,\\ &q_{x,x}^{(1)} + 2q_z^{(2)} - \rho g^{(1)} + \rho C_v \dot{T}^{(1)} + (3\lambda+2G)\hat{\alpha} T_0 (\dot{u}_{x,x}^{(1)} + 2\dot{u}_z^{(2)}) = 0,\quad q_{x,x}^{(3)} - \rho g^{(3)} + \rho C_v \dot{T}^{(3)} + (3\lambda+2G)\hat{\alpha} T_0 \dot{u}_{x,x}^{(3)} = 0,\\ &\frac{2}{3}b^3\{(\lambda+2G)u_{x,xx}^{(1)} + (2\lambda-G)u_{z,x}^{(2)} - (3\lambda+2G)\hat{\alpha} T_{,x}^{(1)}\} + \frac{2}{5}b^5\{(\lambda+2G)u_{x,xx}^{(3)} - (3\lambda+2G)\hat{\alpha} T_{,x}^{(3)}\} - 2Gb(u_{z,x}^{(0)} + u_x^{(1)} + b^2 u_x^{(3)})\\ &+ F_x^{(1)} + f_x^{(1)} = 2\rho\left(\frac{b^3}{3}\ddot{u}_x^{(1)} + \frac{b^5}{5}\ddot{u}_x^{(3)}\right), \quad \cdots\cdots \end{aligned}\right\}(17)$$

式(16)の物理量が境界条件を満足するように，zの係数を$u_x^{(1)} = U_{1x}\cos\frac{n\pi x}{a} e^{i\omega_n t}$　$u_x^{(3)} = U_{3x}\cos\frac{n\pi x}{a} e^{i\omega_n t}$，$u_z^{(0)} = U_{0z}\sin\frac{n\pi x}{a} e^{i\omega_n t}$，‥‥‥のように仮定して，(17)へ代入すると従属量U_{1x}，U_{3x}，U_{0z}，‥‥‥等に関し，定数項がすべて0である同次の連立一次方程式が得られる．この方程式の係数行列式＝0の条件から固有振動数，振動モード形が求められる．

4.2. 物理量を板厚方向座標zに関するFourier級数に展開する場合

4.1.の場合と同じような取扱いを実行すればよい．

5. 結言

具体的な数値計算例および従来までの理論[3,4]による結果等との比較考察は学会当日に発表する．

参考文献
1 平島健一，他，"非定常熱弾性特性を考慮した平板の一般化高次理論の誘導と二，三の考察"，呉高専研究報告 Vol.20, NO.2 (1985), PP. 111～123.
2 丸上晴朗，他，"板厚方向にフーリエ級数展開を用いた熱弾性平板の高次理論"，呉高専研究報告 Vol.21, NO.1 (1985), PP. 81～91.
3 角誠之助，他，"はりの連成熱弾性振動と減衰"，九大工学集報，56 (1983)，PP. 695～701.
4 Massalas, C.V. & V.K. Kalpakidis, "Coupled thermoelastic vibrations of a simply supported beam", J. Sound Vib. 88 (1983), PP. 425～429.