# I－4　不飽和領域を含む非定常浸透流問題の数値解析法

東京工業大学　正員　依知川哲治
東京工業大学　正員　吉田　裕
住友重機械工業　正員　小西　拓洋

## 1．はじめに

土中の水の流れの状態を把握する事は堤体、擁壁、斜面等の安定性などと深いかかわりを持つ工学的にも重要な問題である。浸透流そのものはDarcy則に従う熱伝導型の問題であるが、自由水面を持つ非定常浸透問題では自由水面や不飽和領域の取り扱い、外水位の変化に伴う境界条件の変化の取り扱い等解析上の取り扱いに多くの困難な点を内在させた問題である。これに対し、ここ２０年程の計算機とその利用技術の急速な進歩は、このような飽和－不飽和非定常浸透問題に対しても有限要素法をはじめとする数値解析手法による、解析の試みが多く行われるようになってきている。それらをふまえ、飽和および不飽和領域を一括して扱える浸透流問題の数値解析法を、独自の時間積分法に基づいて構成したのでここに報告する。

## 2．基礎方程式のとその空間に関する離散化

飽和－不飽和浸透問題において、基礎となる方程式は次のようなRichardの方程式で、２次元問題を対象とした場合には、次のような方程式となる。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{xx}\frac{\partial h}{\partial x} + k_{xz}\frac{\partial h}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_{zx}\frac{\partial h}{\partial x} + k_{zz}\frac{\partial h}{\partial z}\right) + q = \left(c + \frac{\theta}{n}S_s\right)\frac{\partial h}{\partial t} \qquad (1)$$

ここで、変数 $h$ は全水頭、$q$ は領域内での涌出しであり、係数 $k_{xx}$ 、$k_{xz}$ 、$k_{zx}$、$k_{zz}$ は透水係数、$c$ は比水分容量、$\theta$ は体積含水率、$n$ は間隙率、また $S_s$ は比貯留係数で水や骨格の圧縮率及び間隙率の関数である。これらの係数のうち $k$ と $c$ は不飽和領域では圧力水頭の関数として変化するので方程式は非線形となる。

一方、境界条件としては水頭の規定される境界 $\Gamma_1$ と流量の拘束される境界 $\Gamma_2$ の２種類が考えられるが、自由水面の変化に伴い境界は $\Gamma_1$ から $\Gamma_2$ へあるいはその逆へと変化するのでその取り扱いが問題となる。

このような方程式（1）に対し全水頭 $h$ を基本変数に、空間に関する離散化を行なうと、次の様なマトリックス方程式を得る。

$$\mathrm{H}u + \mathrm{C}\dot{u} = -q_{m1} + q_{m2} = q \qquad (2)$$

ここで、$u$ は全水頭のベクトル、$q_{m1}$ は領域内での涌出し、$q_{m2}$ は流量の規定される境界 $\Gamma_2$ 上で与えられる既知のベクトルであり、これをまとめて $q$ と表すことができる。

## 3．解法のアルゴリズム

空間に関する離散化により得られた有限要素方程式（２）に対し、以前に著者らが開発した高精度な直接時間積分法【１】に基づき、非線形項はひとつの時間ステップ内で反復計算により収束させて評価することにより解法を構成した。基礎とした時間積分法は式（２）のような時間に１階のマトリックス方程式を対象としたもので、積分法の詳細については紙面の都合上ここでは省略するが、時刻 $t = t_i$ から $t_{i+1}$ への漸化関係式は変数 $\phi$ を介した次の様な漸化関係式として得られるものである。

$$K_{11}\phi = \mathrm{C}u_i + \bar{q}_{i,i+1} \qquad (3)$$

$$K_{21}\phi = -\mathrm{C}u_{i+1} + \bar{q}_{i+1,i} \qquad (4)$$

ここに、$K_{11} = \frac{1}{3}\mathrm{H}^T\mathrm{C}^{-1}\mathrm{H}\Delta t + \frac{1}{2}(\mathrm{H}^T + \mathrm{H}) + \frac{1}{\Delta t}\mathrm{C}$　　$\bar{q}_{i,i+1}$, $\bar{q}_{i+1,i}$：外乱項

$K_{21} = \frac{1}{6}\mathrm{H}^T\mathrm{C}^{-1}\mathrm{H}\Delta t + \frac{1}{2}(\mathrm{H}^T - \mathrm{H}) - \frac{1}{\Delta t}\mathrm{C}$

ところで、不飽和浸透問題では自由水面の移動に伴い、境界も変化する。境界において拘束された水頭の縮約を行って積分漸化式（３）、（４）を適用すると境界の変化のたびに自由度数が変化し、係数マトリックスの大きさが変るので、その操作はかなり繁雑となる。そこで、本解析法では水頭拘束部分を縮約せずにそのままの形で式（３）、（４）に適用した。その結果、外乱項$\bar{q}_{i,i+1}$、$\bar{q}_{i+1,i}$に未知の項が残る事になるが、以下の様にして解法を構成した。まず式（３）（４）に対し境界項を縮約せずに適用すると次式が得られる。

$$K_{1111}\phi_1 + K_{1112}\phi_2 + C_{11}u_1^i + C_{12}u_2^i + \frac{\Delta t}{6}(2q_1^i + q_1^{i+1}) \quad (5a)$$
$$K_{1121}\phi_1 + K_{1122}\phi_2 + C_{21}u_1^i + C_{22}u_2^i + \frac{\Delta t}{6}(2q_2^i + q_2^{i+1}) \quad (5b)$$

$$K_{2111}\phi_1 + K_{2112}\phi_2 - C_{11}u_1^{i+1} - C_{12}u_2^{i+1} + \frac{\Delta t}{6}(q_1^i + 2q_1^{i+1}) \quad (6a)$$
$$K_{2121}\phi_1 + K_{2122}\phi_2 - C_{21}u_1^{i+1} - C_{22}u_2^{i+1} + \frac{\Delta t}{6}(q_2^i + 2q_2^{i+1}) \quad (6b)$$

ここで、$u_2$は$\Gamma_1$上で与えられる水頭で、$q_1$は与えられる外力で既知である。また$u^i$、$q^i$は前ステップでの水頭、反力であるのでこれも既知とみなすことができる。ここでマトリックスＣをlumpingするものとすると、$C_{12}=C_{21}=0$となるので式（５ｂ）と（６ｂ）より$q_2^{i+1}$を消去すると、

$$\begin{bmatrix} K_{1111} & K_{1112} \\ 2K_{1121}-K_{2121} & 2K_{1122}-K_{2122} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11}u_1^i + \frac{\Delta t}{6}(2q_1^i + q_1^{i+1}) \\ C_{22}(u_2^{i+1} + 2u_2^i) + \frac{\Delta t}{2}q_2^i \end{Bmatrix} \quad (7)$$

が得られ、これより$\phi_1$、$\phi_2$を求める事ができる。この$\phi$を式（６ａ、ｂ）に代入することにより全水頭$u^{i+1}$、流量$q^{i+1}$を求めることができる。こうして計算された水頭等に対して、境界条件の修正を行い透水係数、比水分容量を計算し、再び水頭等を計算する。以後これが収束するまで行い１ステップの計算が終了する。

## ４．数値解析例

まず、２次元透水問題であっても流れの鉛直成分が水平成分に比べて充分に小さいというデピューイの仮定が成り立つ場合には、流れは準１次元問題として取り扱う事ができる。図－１に示したような直立堤体で片側の水位がＨだけ上昇した問題は準１次元問題として取り扱うと、基礎方程式はｈ＜＜Ｈｏの場合には次の様になる。

$$\beta\frac{\partial h}{\partial t} = k_x H_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \qquad \beta：貯留係数$$

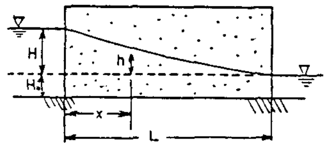
ここで、初期条件および境界条件は

初期条件：　$h(x,0) = 0$

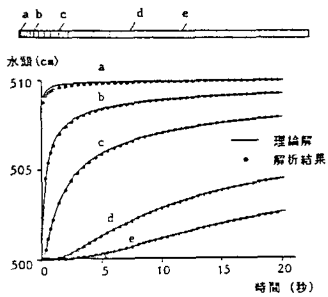
境界条件：　$h(0,t) = H$ , $h(L,t) = 0$

解析結果と赤井らによって求められた理論解【２】との比較を図－２に示す。水頭の時間変化の急激な点を除いては両者は良く一致している。

次に図－３のような矩形堤体の両側の水位が急降下した問題について２次元解析を行った。図－４に時間を追っての自由水面を示すが、水面が降下していく様子が見られる。




図－１　解析対象

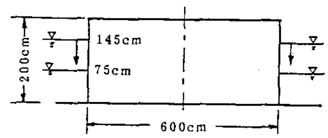



図－２　要素分割と水頭の時間変化

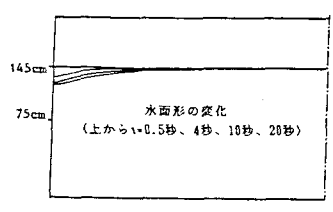
$k_z = k_x = k_0 * k_r$ , $\theta = n * S_r$

$$K_r = \frac{3.6\times10^5}{3.6\times10^5 + |\psi|^{4.5}}$$

$$S_r = \frac{4\times10^4}{4\times10^4 + |\psi|^{2.9}}$$




図－３　解析対象




図－４　水面形の変化

参考文献

１）吉田、藤原、野村：熱伝導型方程式の直接時間積分法と高精度化のアルゴリズム、土木学会論文報告集、No.313,1981,pp.23-36

２）赤井、宇野：土中の準一次元非定常浸透流に関する研究、 No.127,1966,pp.14-22