I-1　部分修正された振動系の振動数方程式の解法

佐世保重工　正員○片山拓朗　熊本大学　正員　平井一男
八代高専　正員　水田洋司　八代高専　内山義博

1）まえがき

構造物の一部が修正された時、修正前の構造物（*system A*）の固有値解を用いて、修正後の構造物（*system B*）の固有値解を求める方法は既に提案[1]されているが、多くの論文は定式化について述べており、導入された式を解く方法について検討している論文は少ない。解く方法によっては、計算時間、計算精度の面から一部修正の利点の損われる場合もある。本報では、一部修正の考えで定式化された *system B* の振動数方程式[2]を行列式と有理関数で表わし、*Laugerr* 法[3]を用いて振動数方程式を効率良く解く方法について述べている。また、数値計算では提案法の妥当性を検討している。

2）振動数方程式の解法

剛性マトリックス$(\mathbf{K})$に$\Delta\mathbf{K}$、質量マトリックス$(\mathbf{M})$に$\Delta\mathbf{M}$の部分修正を受けた *system B* の自由振動の式は

$$\{\mathbf{I}+(\Delta\mathbf{K}-\lambda\Delta\mathbf{M})\mathbf{H}_d(\lambda)\}(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{M})\mathbf{W}_B=0 \tag{1}$$

$$\mathbf{W}_B=\mathbf{H}_d(\lambda)\mathbf{F} \tag{2}$$

$$\mathbf{H}_d(\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\phi_i\,\phi_i^T/(\lambda_i^A-\lambda) \tag{3}$$

ここに、Tは転置、添字A, Bは系を示し、λは固有振動数の2乗、$\mathbf{F}$は外力ベクトル、ϕ_iは固有モードである。(1)式より、*system B* の振動数方程式は

$$\Delta_B(\lambda)=\Delta(\lambda)\cdot\Delta_A(\lambda)=0 \tag{4}$$

$$\Delta(\lambda)=\mathrm{Det}\,|\mathbf{I}+(\Delta\mathbf{K}-\lambda\Delta\mathbf{M})\mathbf{H}_d(\lambda)| \tag{5}$$

$$\Delta_A(\lambda)=\mathrm{Det}\,|\mathbf{K}-\lambda\mathbf{M}| \tag{6}$$

ここに、$\Delta_A(\lambda)=0$は *system A* の振動数方程式である。また、$\Delta_A(\lambda)$、$\Delta_B(\lambda)$はそれぞれ、次式の様な特性多項式で表わされる。

$$\Delta_A(\lambda)=A_N(\lambda_1^A-\lambda)(\lambda_2^A-\lambda)\cdots(\lambda_N^A-\lambda) \tag{7}$$

$$\Delta_B(\lambda)=B_N(\lambda_1^B-\lambda)(\lambda_2^B-\lambda)\cdots(\lambda_N^B-\lambda) \tag{8}$$

但し、Nは系の自由度である。(4)(8)式のλ_i^Bを求めるのに *Laugerr* 法を用いる。この反復式は

$$\lambda_{k+1}=\lambda_k-\frac{N}{\alpha_k\pm\sqrt{(N-1)(N\beta_k-\alpha_k^2)}} \tag{9}$$

$$\alpha_k=\Delta_B^{(1)}(\lambda_k)/\Delta_B(\lambda_k) \tag{10}$$

$$\beta_k=\left(\Delta_B^{(1)}(\lambda_k)/\Delta_B(\lambda_k)\right)^2-\Delta_B^{(2)}(\lambda_k)/\Delta_B(\lambda_k) \tag{11}$$

ここに、上付添字( )はλに関する微分階数を表わす。(4)(7)式の関係を用いて、(10)(11)式を書き直すと、

$$\alpha_k=\frac{\Delta^{(1)}(\lambda_k)}{\Delta(\lambda_k)}-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda_i^A-\lambda} \tag{12}$$

$$\beta_k=\left(\frac{\Delta^{(1)}(\lambda_k)}{\Delta(\lambda_k)}\right)^2-\frac{\Delta^{(2)}(\lambda_k)}{\Delta(\lambda_k)}+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{(\lambda_i^A-\lambda)^2} \tag{13}$$

$\Delta^{(1)}(\lambda_k)/\Delta(\lambda_k)$、$\Delta^{(2)}(\lambda_k)/\Delta(\lambda_k)$を *Trace* 理論で計算すると

$$\Delta^{(1)}(\lambda_k)/\Delta(\lambda_k)=\mathrm{Trace}\{\mathbf{D}^{-1}(\lambda_k)\,\mathbf{D}^{(1)}(\lambda_k)\} \tag{14}$$

$$\Delta^{(2)}(\lambda_k)/\Delta(\lambda_k)=\mathrm{Trace}\{\mathbf{D}^{-1}(\lambda_k)\,\mathbf{D}^{(2)}(\lambda_k)\} \tag{15}$$

ここに、

$$\mathbf{D}(\lambda)=\mathbf{I}+(\overline{\Delta\mathbf{K}}-\lambda\overline{\Delta\mathbf{M}})\overline{\mathbf{H}_d}(\lambda) \tag{16}$$

$$\mathbf{D}^{(1)}(\lambda)=-\overline{\Delta\mathbf{M}}\,\overline{\mathbf{H}_d}(\lambda)+(\overline{\Delta\mathbf{K}}-\lambda\overline{\Delta\mathbf{M}})\overline{\mathbf{H}_d}^{(1)}(\lambda) \tag{17}$$

$$\mathbf{D}^{(2)}(\lambda)=-2\overline{\Delta\mathbf{M}}\,\overline{\mathbf{H}_d}^{(1)}(\lambda)+(\overline{\Delta\mathbf{K}}-\lambda\overline{\Delta\mathbf{M}})\overline{\mathbf{H}_d}^{(2)}(\lambda) \tag{18}$$

$$\mathbf{H}_d^{(1)}(\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\phi_i\phi_i^T/(\lambda_i^A-\lambda)^2 \tag{19}$$

$$\mathbf{H}_d^{(2)}(\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\phi_i\phi_i^T/(\lambda_i^A-\lambda)^3 \tag{20}$$

(16)~(18)式中の$\overline{\Delta\mathbf{K}}$, $\overline{\Delta\mathbf{M}}$は修正マトリックス$\Delta\mathbf{K}$, $\Delta\mathbf{M}$から零要素を取り除き縮小したマトリックスであり、修正部分の自由度に等しい。$\overline{\mathbf{H}_d}(\lambda)$は$\Delta\mathbf{K}$, $\Delta\mathbf{M}$に対応する縮小マトリックスである。(14)(15)式より、(12)(13)式は

$$\alpha_k=\mathrm{Trace}\{\mathbf{D}^{-1}(\lambda_k)\mathbf{D}^{(1)}(\lambda_k)\}-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda_i^A-\lambda} \tag{21}$$

$$\beta_k=\mathrm{Trace}\{(\mathbf{D}^{-1}(\lambda_k)\mathbf{D}^{(1)}(\lambda_k))^2-\mathbf{D}^{-1}(\lambda_k)\mathbf{D}^{(2)}(\lambda_k)\}+\sum\frac{1}{(\lambda_i^A-\lambda)^2} \tag{22}$$

となる。以上の事より、*system B* の固有値λ_i^Bは *system A* の固有値解λ_i^A、ϕ_iを用いて、(9)(21)(22)式で求められる。

3）固有ベクトルの算定

(9)式で算定された *system B* のλ_i^Bを(1)式に代入して$(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{M})\mathbf{W}_B$を求め、これを$\mathbf{F}$として、(2)式より変形$\mathbf{W}_B$が求められる。この$\mathbf{W}_B$が$\lambda_i^B$に対応する$\phi_i^B$である。即

$$\phi_i^B=\mathbf{H}_d(\lambda_i^B)\mathbf{F} \tag{23}$$

4）2次以降の固有値の算定

既に求められている *system B* のS個の固有値をλ_1^B, $\lambda_2^B\cdots\lambda_S^B$とすると、*system B* の特性多項式は

$$\Delta_B(\lambda)=\Delta_S(\lambda)\Delta_b(\lambda) \tag{24}$$

$$\Delta_S(\lambda)=(\lambda_1^B-\lambda)(\lambda_2^B-\lambda)\cdots(\lambda_S^B-\lambda) \tag{25}$$

$$\Delta_b(\lambda)=b\times(\lambda_{S+1}^B-\lambda)(\lambda_{S+2}^B-\lambda)\cdots(\lambda_N^B-\lambda) \tag{26}$$

と表わすことが出来る。従って、反復関数として

$$\Delta_b(\lambda)=\Delta_B(\lambda)/\Delta_S(\lambda) \tag{27}$$

を用いれば、$\Delta_b(\lambda)$は(N-S)次のλの多項式となり、既に求まっている固有値に収束することはない。この時の反復式はNをN-Sに、(21)(22)式のα_R、β_Rを

$$\alpha_R \longrightarrow (21)式+\sum_{i=1}^{S}\frac{1}{\lambda_i^B-\lambda} \tag{28}$$

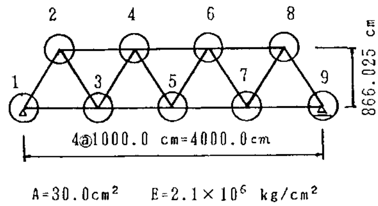
$$\beta_R \longrightarrow (22)式-\sum_{i=1}^{S}\frac{1}{(\lambda_i^B-\lambda)^2} \tag{29}$$

に置き換えた式となる。

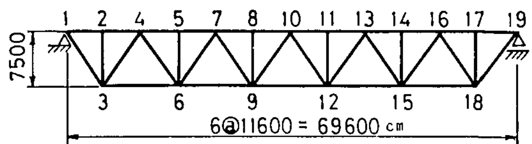
5）数値計算

表－1　質量

joint	mass (kg·s²/cm)
2	1.02
3	5.10
4	2.04
5	5.10
6	2.04
7	5.10
8	1.02
9	2.55



図－1　９節点トラス橋



E=2.1×10⁶ kg/cm²

図－2　１９節点トラス橋

計算モデルは、図-1 図-2に示している。図-1では4,5節点の質量と4-5部材の断面積が共にsystemAの3/4に減小した系を、図-2では9-12部材の断面積がsystemAの1.5倍に増加し、質点9、12の質量が0.683 kg·s²/cm増加した系をsystemBとした。表-1～表-3には、それぞれ図-1、図-2のトラス橋の断面積、質量を示している。

表－２　断面積　(cm²)

member				area of cross section
1—2	2—4	16—17	17—19	257.0
4—5	5—7	13—14	14—16	325.0
7—8	8—10	10—11	11—13	391.0
3—6	15—18			178.0
6—9	12—15			262.5
1—3	4—6	15—16	18—19	182.6
3—4	6—7	13—15	16—18	250.8
7—9	12—13			82.8
9—10	10—12			115.6
9—12				294.0
2—3 11—12	5—6 17—18	8—9	14—15	102.0

表－３　質量　(kg·s²/cm)

joint	mass	joint	mass
2	30.69	11	31.31
3	2.78	12	3.65
4	32.19	13	32.12
5	31.01	14	31.01
6	4.00	15	4.00
7	32.12	16	32.19
8	31.31	17	30.69
9	3.65	18	2.78
10	31.88	19	15.89

systemA、systemBの固有値解析にはQR法を用い、倍精度計算を行ったが、提案法によるsystemBの計算は単精度で行った。

表－４　固有振動数の比較

NO	QR－method FREQUENCY (rad/sec) SYSTEM-A	SYSTEM-B	Propose-method(ε=1.0E-6) FREQUENCY λ_0=0.159E+1	CYCLE	FREQUENCY (rad/sec)	INITIAL (λ_0)	CYCLE
1	0.408508E+1	0.432620E+1	0.432620E+1	4	0.432620E+1	0.159E+1	4
2	0.736893E+1	0.765301E+1	0.765301E+1	4	0.765301E+1	0.751E+1	3
3	0.118181E+2	0.117621E+2	0.117621E+2	4	0.117621E+2	0.120E+2	3
4	0.178078E+2	0.184815E+2	0.184815E+2	5	0.184815E+2	0.178E+2	3
5	0.205477E+2	0.211628E+2	0.211628E+2	4	0.211628E+2	0.211E+2	2
6	0.260810E+2	0.264998E+2	0.264998E+2	5	0.264998E+2	0.266E+2	2
7	0.285078E+2	0.301743E+2	0.301743E+2	5	0.301743E+2	0.289E+2	4
8	0.312042E+2	0.318829E+2	0.318829E+2	4	0.318829E+2	0.327E+2	3
9	0.386093E+2	0.395759E+2	0.395759E+2	5	0.395759E+2	0.392E+2	3
10	0.402100E+2	0.417022E+2	0.417022E+2	5	0.417022E+2	0.411E+2	3
11	0.406686E+2	0.428648E+2	0.428648E+2	4	0.128648E+2	0.421E+2	3
12	0.502415E+2	0.503061E+2	0.503061E+2	5	0.503061E+2	0.529E+2	3
13	0.515895E+2	0.516000E+2	0.516000E+2	4	0.516000E+2	0.520E+2	3
14	0.555918E+2	0.563503E+2	-0.563503E+2	4	0.563503E+2	0.544E+2	2
15	0.610582E+2	0.642793E+2	0.642793E+2	3	0.642793E+2	0.617E+2	2

表－５　計算時間の比較
（全モードを計算、単精度）

method	time (sec)
Jacobi method	600
Q R method	107
Proposed method	184

（10次モードまで計算、単精度）

number of modes	time (sec)
35	48
30	44
25	39
20	33
15	28
10	22

図-1のモデルでは、初期値(λ_0)の選定（systemAの固有値の近傍値と任意の値）によって、収束に要する回数・計算精度がどのように変化するかを調べた。その結果は表-4に示しており、εは収束判定値である。表5には、図-2のモデルについて調べた計算時間の比較を表わしている。計算に使用した電子計算機は富士通FM11-BSである。

6）あとがき

本報で提案した解法は、数値計算の結果、次の様な利点を持つことが判った。

1. 少ない反復回数で高精度の固有値が得られ、その精度は初期値に左右されない。
2. 必要な個数の固有値を低次から順に求めることが可能である。

提案法の位置付けを明確にするために、今後、既に適用実績のあるNewton－Raphson法、Müller法と、計算時間・精度の面で比較検討する必要があろう。

（参考文献）

(1) Jasbir, S. Arora : Survey of Structural Reanalysis Technique, Journal of the Structural Division, ASCE, No. ST4, Proc. Paper 12056, PP783～802, 1976-4.

(2) Hirai, I., et al. : On a Direct Eigenvalue Analysis for Locally Modified Structures, International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol. 6, PP441～442, 1973.

(3) A. M. Ostrowsky : Solution of Equations and Systems of Equations, Second Edition, Academic Press, 1966.

(4) 平井・水田：部分修正された振動系のパワーメソッドによる固有値解析、熊本大学研究報告第31巻第2号 昭和57年9月.

(5) 片山拓朗他：λ-Matrix を用いた一部修正された非減衰系の固有値解析、60年度西部支部研究発表会講演集、昭和61年3月.