Ⅳ-242　交通モード均衡の計算法－ラベリング法について－

岐阜大学工学部　正員　宮城俊彦

1．研究目的

交通費用が交通量に依存して変化する要因を含む場合の均衡状態における交通機関分担率を求める問題を考える。このような交通モード均衡問題の解法には，(1) Beckmann 型の数理最適化モデルを利用する方法，(2) ヒューリスティックな簡便法　そして　(3) 不動点近似法　などが考えられる。本研究はこれらの解法のうち (3) の手法を開発する目的でその基本となる考え方について考察したものである。

2．交通モード均衡と不動点

今，m個の交通モードで結ばれる2地域間の交通を対象とし，地域間交通需要量Xが与えられている場合の各モードの分担率を求める問題を考える。各モードの需要関数および可変交通費用関数は次式で与えられるものとする。

$$\left.\begin{array}{ll}\text{需要関数} & d_i = X D_i(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) \\ \text{費用関数} & c_i = C_i(\mathbf{d})\end{array}\right\} \quad (i=1,2,\cdots,m) \qquad (1)$$

ここに，　$\mathbf{A}$：社会経済指標を表わすベクトル　$\bar{\mathbf{C}}$：交通量に依存しない固定交通費用ベクトル

$\mathbf{C}$：交通量に依存して変化する可変交通費用ベクトル　$D_i(\cdot)$：モードiの分担率関数

ここで，　$x_i = d_i / X$　とおくならば，

$$\sum x_i = \sum D_i(\cdot) = 1 \quad , \quad x_i \geq 0 \quad (i=1,2,\cdots,m) \qquad (2)$$

が成立する。このとき，式(1)を満足する均衡交通量 $\hat{\mathbf{d}}$ を求める問題は，不動点 $\hat{x}_i = D_i(\hat{\mathbf{x}})$ を求める問題になる。

ところで，式(2)を満足するすべて点を表現するには次式に示す重心座標が便利である。

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{v}^1 + x_2 \mathbf{v}^2 + \cdots + x_m \mathbf{v}^m \qquad (3)$$

式(3)は $(m-1)$ 次元単体のすべての点を表しており，モード数が2の場合，単体は線分であり，モード数が3ならば三角形となる。なお，$\mathbf{v}^i$ は i 番目要素のみが1，その他の要素は0をもつ単位ベクトルである。重心座標においては式(2)が成立するので，$\hat{x}_i = D_i(\hat{\mathbf{x}})$ を満足する不動点を求めることと $\hat{x}_i \geq D_i(\hat{\mathbf{x}})$ を満足する $\hat{\mathbf{x}}$ を求めることは等価であり，したがって，超過需要関数 $g_i(\mathbf{x}) = D_i(\mathbf{x}) - x_i$ を定義するならば均衡解(不動点) $\hat{\mathbf{x}}$ は，$g_i(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0$ を満足する。

上記のことを2モードの場合について図解したのが図-1 (a),(b) (c) である。(a) 図は分担率が費用差の関数で与えられるとき(例えばロジットモデル)の交通モード均衡を表しており，(b) 図はその不動点原理図による表現である。この場合，x のとりうるすべての点は，(c) 図の1次元単体 (S^1) 上にある。

ラベリング法の基本的な考え方は，(c) 図のような単体を分割し部分単体とし(図の例では，σ^1, σ^2)，それらの単体の端点に，ある規則に従った整数ラベルを割りつけ，そのラベル集合

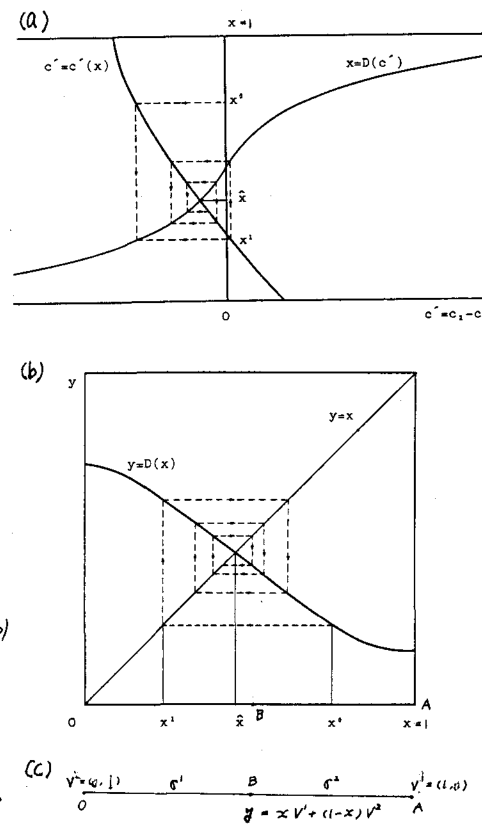

図-1　交通モード均衡と不動点の関係およびその重心座標による表現

が異なるm個の整数値により構成されるとき，その部分単体は不動点を含むとするものである．ラベル付けの規則は次式で与える．

$$\ell(x) = \min\{i \in L : g_i(x) \le 0,\ x_i > 0\},\ L = \{1, 2, \cdots, m\} \quad (4)$$

図の例についていえば，A点では $D(1) \ne 1$，$D(1) < 1$ であり，$\ell(A) = 2$．また，O点では $D(0) \ne 0$，$D(0) > 0$ より，$\ell(0) = 1$．したがって，完全ラベルをもつので単体OAは不動点を含む．次にOAを2分割して得られる部分単体 σ^1，σ^2 をみてみる．B点では，$D(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$ であり，$\ell(B) = 2$．したがって，σ^1 の端点は (1, 2) という完全ラベルをもつのに対し，σ^2 は (2, 2) という不完全ラベルであり，不動点は σ^1 に含まれる．より高い精度で不動点を近似するには σ^1 をさらに細かく分割すればよい．

3．ラベリング法による不動点近似

n次元単体 S^n を単体分割したもの G とおき，G に含まれる部分単体の各端点に (4) の規則でラベル付けを行うとき，完全ラベルをもつ単体が少なくとも1個存在することが Sperner によって証明された．このような完全ラベルをもつ単体が不動点を含むことは前述の例で明らかであるが，ここではより一般的な場合について，ラベリング法と不動点の関係について触れる．この関係は次のように説明することができる．

『G は n次元単体を端点間の距離が δ である部分単体に分割した単体の集合とする．また，分担率を与える関数Dは連続であり，$x, z \in S^n$ に対し，$\|x - z\|_\infty < \delta$ のとき，$\|D(x) - D(z)\|_\infty \le \varepsilon$ となるような関数 $D : S^n \to S^n$ である．部分単体の端点のラベル付け規則は (4) で与えられる．このとき，部分単体 σ が完全ラベルをもつならば，σ に含まれる点 $\hat{x}$ に対し，$\|D(\hat{x}) - \hat{x}\|_\infty \le n(\varepsilon + \delta)$ であり，$\delta \to 0$（すなわち $\varepsilon \to 0$）とすることによって不動点を求めることができる．』

（証明） y^i は σ の端点であり，その要素 y^i_i は $i = 1, 2, \cdots, n+1$ のどれか1つの整数ラベルをもつものとする．このとき，

$$D_i(\hat{x}) - \hat{x}_i = \underbrace{D_i(\hat{x}) - D_i(y^i)}_{\substack{\le \varepsilon \\ \left(\text{Dの連続性および} \atop \delta\text{の選択によって}\right)}} + \underbrace{D_i(y^i) - y^i_i}_{\substack{\le 0 \\ \left(\text{ラベリング規則} \atop \text{(4)によって}\right)}} + \underbrace{y^i_i - \hat{x}_i}_{\substack{\le \delta \\ \left(\text{単体分割のダイアメータ} \atop \delta\text{の選択によって}\right)}} \le \varepsilon + \delta \quad (5)$$

また，$\sum_{i=1}^{i=n+1} (D_i(\hat{x}) - \hat{x}_i) = 1 - 1 = 0$ （式 (2) より）となることから，

$$D_i(\hat{x}) - \hat{x}_i = -\sum_{j \ne i} (D_j(\hat{x}) - \hat{x}_j) \ge -n(\varepsilon + \delta) \quad (\text{式(5)より}) \quad (6)$$

式 (5)，(6) より $-n(\varepsilon + \delta) \le D_i(\hat{x}) - \hat{x}_i \le \varepsilon + \delta \le n(\varepsilon + \delta)$

よって，

$$\| D_i(\hat{x}) - \hat{x}_i \|_\infty \le m(\varepsilon + \delta) \quad (7)$$

4．均衡解の求め方の概要

① m個のモードのとき，(m-1)次元単体 S^{m-1} をダイアメータ δ をもつ部分単体に分割する．

② 初期解を与える単体を定める．この場合，不完全ラベルをもつ単体から出発して完全ラベルをもつ単体に到着できるようにするため Kuhn の人工ラベルル法を用いる．

③ 対象とする単体に(4)によるラベル付けを行い，完全ラベルかどうか判定する．そうならば④へ進む．もし，そうでないならばピボット操作により隣接する単体に移行し，前半と同様の操作を行う．

④ 近似の精度を高めたいならばダイアメータ δ を小さくし，②，③の操作をくり返す．

5．おわりに

ラベリング法の計算効率をあげるにはラベリング規則がどのように設定するかが最も重要である．本研究では分担率関数Dを利用しているが，Dを修正した関数を用いることもでき今後の検討課題としたい．