Ⅳ-126　Ｌｉｅ群論による住宅市場の動学化に関する二三の試み

京都大学工学部　正　員　吉川和広
京都大学工学部　正　員　小林潔司
京都大学大学院○学生員　張　衛彬

1　緒言

近年、わが国を含めた先進諸国の大都市圏においては、従来のような都市圏の成長にはどめがかかり、都市圏の衰退といった新しい問題も生じるようになってきた。このような新しい状況のもとで大都市圏の地域構造や社会・経済的環境は従来とは異なった方向へ変動しつつある。また、近年人々の価値観は多様化してきており、住宅立地に関する嗜好や効用も変化しつつあることが指摘されている。しかしながら、これまでに開発されてきた住宅立地モデルや市場理論ではこのような環境の変化や人々の住宅立地に対する嗜好の変化に十分対処できないという問題がある。都市モデルを作成する場合、我々は対象とする現象の中から本質的であると考えるメカニズムを構造として抽象し、これを数学モデルとして記述することとが多い。われわれが作成した都市モデルは現象を構造として理解した結果であり、したがって、構造そのものの変化をモデル化することは極めて困難であるといわざるを得ない。現在、構造変動下における都市モデルの動学化の問題を直接取上げたような研究としては、(1) 起こりうる構造変動をあらかじめ想定し、これを直接モデル化する方法(A.G.Wilson)、(2) 構造変動をシステムの自己組織化過程としてとらえ、その動的過程を非線形の微分方程式によって記述しようとする方法(Allen) 等が提案されている。しかしながら、これらの研究は物理学の分野の理論を直接都市モデルの動学化に適用したものであり、立地主体の行動原理を内蔵しているわけでない。また、起こりうるであろう構造変動をそれにさかのぼった時点でいかに実証的に検証しモデル化しうるかに関して不明な点がある。これに対して、われわれは環境や嗜好が変動している「場」の中においても、対象とする現象を安定的にモデル化しうるような方法を開発するという立場に立つこととした。すなわち、本研究では、構造変動を記述する方法としてLie 群論における無限小変換(infinitestimal transformation) に着目するとともに、このような変換により生成されるLie 群を用いることにより構造変動を内蔵しうる都市モデルの開発を試みるものである。Lie 群論を用いた都市モデルに関する研究は緒についたばかりでありまだ体系的な分析を行うにいたっていないが、住宅立地モデルに関して若干の理論的な研究成果が得られたのでここに報告することとする。

2　基本モデル

動学的住宅市場モデルに関しては例えばDiamond(1982) らの研究があるが、本研究では以下のような動学的モデルを提案するとともに、このモデルに基づいてLie 群論の適用可能性を検討してみることとする。いま、住宅立地行動を表-1の式-1に示すような期待立地余剰最大化問題として定式化する。いま、式-2に示すようなLagrangianを定義し、式-1の極値問題を変分問題とし定式化する。式-1の極値条件は式-3に示すようなEuler 方程式により示される。ここで、Lie 群論を適用するための準備段階として式-1に示す効用関数、コスト関数が陽に時間に依存しないと考えると、式-3に示すEuler 方程式より式-4に示す条件式が導かれる。効用関数、コスト関数が時間に陽に依存しない場合には、式-4中のHamiltonian は定数になる。従って、式-4は効用関数に関する一階の偏微分方程式となり、この方程式を解くことにより住宅立地モデルの基本的な構造を決定できる。具体的に住宅立地モデルを作成するためには、ある時点で観測されたデータを用いて偏微分方程式の解に含まれる定数等を推計すればよい。式-4は時間軸上の任意の時点においても成立し、同式の左辺は常に定数となることより、本研究では式-4を住宅市場における保存則(Conservation Law)と呼ぶこととする。しかしながら、効用関数、コスト関数等は技術革新や立地主体の嗜好の変化により長期的には時間にともなって変化すると考えられる。そこで、このような環境条件の変化が起こった場合の保存則をLie

群論によるNoether の定理を用いて導出することとする。

3　Noether の定理による住宅市場の保存則

ここでは議論を簡単にするために、効用関数が都心までの時間距離とアクセシビリティの関数として表わされると考える。（コスト関数に関しても同様な議論が展開できるので、ここでは効用関数のみとりあげることとする。）ここで人々の時間価値は社会・経済環境や人々の嗜好の変化により変化する。このような時間価値の変化を　可微分多様体上の無限小変換によって式-5に示すように記述する。Noether の定理は無限小変換に対して不変となる保存則の条件を示したものであり、この定理を用いれば、都心までの時間距離やアクセシビリティのもつ時間価値がこのような無限小変換によって変化していった場合における保存則を導出することができる。いま、このことを簡単な例を上げて説明する。例えば、効用関数として式-6を考え、効用の構造が式-7に示すような無限小変換によって生成される経路に沿って変動していく場合、住宅市場の保存則はNoether の定理を用いて式-8に示すように求められる。　保存則を用いれば時間価値のほかにも例えば交通システムや住宅建設技術等の技術革新が住宅市場に及ぼす影響を２で述べたような方法で分析することができる。また、保存則を将来予測に用いるためには、例えばシナリオとして与えたある将来時点での技術変化や嗜好の変化あるいは政策を保存則に代入したうえで偏微分方程式を解けばよい。現在、効用関数、コスト関数に関して種々の関数を想定し、どのような無限小変化のもとでどのような保存則が成立しうるか、保存則が成立する場合に住宅立地モデルはどのような構造になるのかといった問題に関して知見を得ている。この研究成果に関しては、講演時に述べここでは省略する。

表－１　モデルの定式化

$$\text{Max } Z=\int_0^T [U(A,S,H,N,\dot{A},\dot{H},\dot{N},t)N\cdot\exp(-kt) - \dot{N}C(S,H,t)\exp(-kt)]dt, \quad \text{---(1)}$$

$$L=[U(A,S,H,N,\dot{A},\dot{H},\dot{N},t)N-\dot{N}C(S,H,t)]\exp(-kt) \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial A}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{A}}\right)=0,\quad \frac{\partial L}{\partial S}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{S}}\right)=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial H}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{H}}\right)=0,\quad \frac{\partial L}{\partial N}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{N}}\right)=0 \quad \text{---(3)}$$

$$-L+N\frac{\partial L}{\partial \dot{N}}+A\frac{L}{\dot{A}}+S\frac{L}{\dot{S}}+H\frac{L}{\dot{H}}=\text{const.} \quad \text{---(4)}$$

$$\bar{t}=t+\epsilon\tau(t,V)\qquad \tau(t,V)=\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon}(t,V,0)$$
$$\bar{V}=v+\epsilon\xi(t,V)\qquad \xi(t,V)=\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}(t,V,0) \quad \text{---(5)}$$

$$U=U(V,\dot{V})=U(F) \quad \text{---(6)}$$

$$\tau=0,\ \xi=\text{constant}=1 \quad \text{---(7)}$$

$$\Omega=U+\frac{dU}{dF}\cdot C=-\text{Hamiltonian} \quad \text{----(8)}$$

ここに、U(A,S,H,N,$\dot{A}$,$\dot{H}$,$\dot{N}$,t)は効用関数であり、A:立地条件（アメニティ、通勤時間等）、S:宅地面積、H:住宅特性、N:世帯数、t:時間の関数として表わされる。k は割引率であり、C(S,H,t)は住宅建設コストを示す。L はラグランジュ関数を示している。また、ϵ は無限小変換のパラメータであり、数学的にはユークリッド空間上の ϵ と　可微分多様体上の経路(path)ϕ，φ 上の各点が一対一対応することとなる。t、v はそれぞれ時間および都心までの通勤時間を示している。t、v は時間価値が変化することにより上述の経路に沿って変化するが、$\bar{t}$，$\bar{v}$ はある時点において観測された t，v の値を観測の初期点(t=0) の時間価値を用いて評価した値である。f(v)はアクセシビリティであり時間距離の関数で表わされると考える。F(V,$\dot{V}$)＝f(V)-$\dot{V}$は総合的な立地条件の良さを示す関数である。最後に、Ω はここでは定数となり、その値は（-Hamiltonian) と等しくなる。

4　結言

ある特定の種類のLagrange関数に関しては、住宅市場における保存則を解析的な方法を用いて解くことができる。しかし、変数間での相互作用が存在するような一般的な場合においては数値解析的な方法に頼らざるを得ない。現在、住宅市場の保存則に関する体系的な整理を行うとともに、数値解析の方法やさらに無限小変換を実証的に推計する方法に関して研究を行っている。また、本稿で述べたような考え方は土地利用モデルのみならず交通モデルに関しても適用可能であり、これらに関しても研究成果が得られ次第報告したいと考える。

参考文献1)Diamond,et al,The Economics of Urban Amenities, 1982. 2)Sato,R.,Theory of Technical Change and Economic Invariance -application of Lie Groups, Academic Press, 1981