

佛応用地質調査事務所 (正) 鶴原 敬久
名古屋大学工学部 (学) 京谷 孝史
名古屋大学工学部 (正) 市川 康明
名古屋大学工学部 (正) 川本 脩万

1. まえがき 岩質材料に弾塑性構成則を適用する場合、せん断応力の作用により体積変化が生じるということ、および降伏条件が等方応力の影響を受けるということの2つの特性をいかに導入するかが問題となる。本研究では、流れ則を仮定せず、等方応力・偏差応力と体積塑性ひずみ・偏差塑性ひずみの間の応答関数およびII平面上での降伏曲面の形状を決定する偏差応力の回転角を降伏関数に導入し、弾塑性構成則を誘導する。そして、多孔質凝灰岩の大谷石に適用し実際に弾塑性構成則を決定する。

2. 弾塑性構成則の誘導 Fig. 1 に示したように、II平面上における降伏曲面の形状を決定する因子は、偏差応力Sおよびその回転角 α_0 である。ただし、

$$S = (S_{ij} S_{ij})^{1/2} \quad S_{ij}; \text{偏差応力テンソル}$$

$$\alpha_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{J_2}{(J_3)^{1/2}} \quad J_2; \text{偏差応力の2次の不変量}$$

$$J_3; \text{偏差応力の3次の不変量}$$

である。Zienkiewicz¹⁾により、任意の等方応力 $\bar{\sigma}$ におけるII平面上の降伏曲面の形状が相似形であるとした場合、偏差応力Sは、偏差応力の回転角 α_0 の関数 $\Theta(\alpha_0)$ および、ある回転角(ここでは $\alpha_0 = 0$)のときの偏差応力 S^+ により

$$S = \Theta S^+$$

(1)

となるように関数 Θ を決定することにより、II平面上における降伏曲面を表現できる。ここで、 $\bar{\sigma} = 1/\sqrt{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ である。この降伏曲面を市川²⁾によるベクトル型降伏関数に適用することにより、 $\bar{\sigma}$ 、S、 α_0 を考慮した弾塑性構成則を誘導した。 α_0 を考慮した場合、応答関数は次のようになる。

$$S^+ = \Phi(e^p, \bar{\epsilon}^p) \quad (2)$$

$$\bar{\sigma} = \Psi(e^p, \bar{\epsilon}^p) \quad (3)$$

ただし、 $e^p = (e_{ij}^p e_{ij}^p)^{1/2}$ 、 $\bar{\epsilon}^p = 1/\sqrt{3}(\epsilon_1^p + \epsilon_2^p + \epsilon_3^p)$ 、 e_{ij}^p : 偏差塑性ひずみテンソル。この増分形をとると

$$\begin{Bmatrix} dS^+ \\ d\bar{\sigma} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial e^p} & \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\epsilon}^p} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial e^p} & \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\epsilon}^p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} de^p \\ d\bar{\epsilon}^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} de^p \\ d\bar{\epsilon}^p \end{Bmatrix} \quad (4)$$

となる。さらにこの逆関数を求め、 dS^+ をdS、 $d\alpha_0$ で書き直せば

$$\begin{Bmatrix} de^p \\ d\bar{\epsilon}^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} dS^+ \\ d\bar{\sigma} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & \frac{\mu}{h} \\ \frac{\beta}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dS^+ \\ d\bar{\sigma} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & \frac{\mu}{h} \\ \frac{\beta}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial S^+}{\partial S} & 0 & \frac{\partial S^+}{\partial \alpha_0} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dS \\ d\bar{\sigma} \\ d\alpha_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S^+}{\partial S} \cdot \frac{1}{h} & \frac{\mu}{h} & \frac{\partial S^+}{\partial \alpha_0} \cdot \frac{1}{h} \\ \frac{\partial S^+}{\partial S} \cdot \frac{\beta}{h} & \frac{1}{h} & \frac{\partial S^+}{\partial \alpha_0} \cdot \frac{\beta}{h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dS \\ d\bar{\sigma} \\ d\alpha_0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

となり、塑性ひずみ増分と応力増分の関係が得られた。ここで、 $(S, \bar{\sigma}, \alpha_0)$ を成分とする円柱座標系の基底テンソルを (m, n, k) とすると応力増分テンソルは

$$d\sigma = m dS + n d\bar{\sigma} + k S d\alpha_0 \quad (6)$$

と表れるので、式(5)は

$$de^p = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial S^+}{\partial S} m + \mu n + \frac{\partial S^+}{\partial \alpha_0} \frac{1}{h} k \right) \cdot d\sigma \quad (7)$$

$$d\bar{\epsilon}^p = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial S^+}{\partial S} \beta m + n + \frac{\partial S^+}{\partial \alpha_0} \beta \frac{1}{h} k \right) \cdot d\sigma \quad (8)$$

となる。また、 $d\bar{\epsilon}^p$ と S 、 $d\bar{\epsilon}^p$ と $\bar{\sigma}$ がそれぞれ共軸性を有することが知られているので

$$d\bar{\epsilon}^p = m d\bar{\epsilon}^p + n d\bar{\epsilon}^p \quad (9)$$

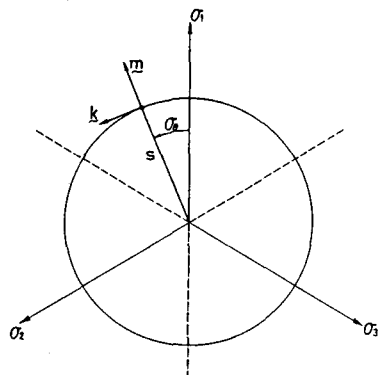


Fig.1 Lode angle α_0 and deviatoric stress S in II-plane

となる。これより

$$d\epsilon^p = \left(\frac{1}{n} \otimes \left(\frac{\partial S^*}{\partial S} m + \mu n + \frac{\partial S^*}{\partial \alpha} \frac{1}{S} k \right) + \frac{1}{n} \otimes \left(\frac{\partial S^*}{\partial S} \beta m + n + \frac{\partial S^*}{\partial \alpha} \beta \frac{1}{S} k \right) \right) d\epsilon = \mathbb{C}^p d\epsilon \quad (10)$$

が求まる。ここで $\otimes$ はテンソル積である。従って、弾性コンプライアンス $\mathbb{C}^e$ を用いることにより

$$d\epsilon = (\mathbb{C}^e + \mathbb{C}^p)^{-1} d\epsilon = \mathbb{D}^e d\epsilon \quad (11)$$

が得られ、弾塑性構成則が誘導された。

3. 大谷石への適用 Φ および Ψ は慣用三軸試験より決定され、 Θ は純三軸試験より決定される。

3.1 Φ および Ψ の決定 Fig.2, Fig.3より等方応力 $\bar{\sigma}$ および偏差応力 S は e^p および $\bar{e}^p$ に関して単調な関数であることがわかるので、スペクトル解析手法³⁾により

$$\Phi = S_0 + a_1(1 - \exp(-\bar{e}^p/\omega_1)) + a_2(1 - \exp(-e^p/\tau_1)) + a_3(1 - \exp(-\bar{e}^p/\omega_1))(1 - \exp(-e^p/\tau_1)) \quad (12)$$

$$\Psi = \bar{\sigma}_0 + b_1(1 - \exp(-e^p/\tau_2)) + b_2(1 - \exp(-\bar{e}^p/\omega_2)) + b_3(1 - \exp(-e^p/\tau_2))(1 - \exp(-\bar{e}^p/\omega_2)) \quad (13)$$

となった。ただし、 $S_0=7.40$, $a_1=-0.5885$, $a_2=15.244$, $a_3=-10.547$, $\bar{\sigma}_0=-5.344$, $b_1=-45.639$, $b_2=4.144$, $b_3=36.396$ (MPa), $\omega_1=0.0002$, $\tau_1=0.001$, $\omega_2=0.0002$, $\tau_2=0.001$ である。

これを Fig.4, Fig.5 に示す。

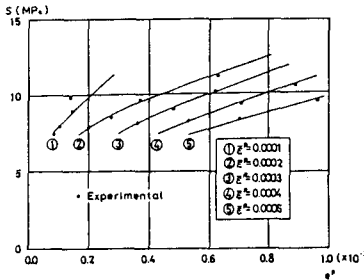


Fig.2 Experimental data of deviatoric stress and deviatoric plastic strain

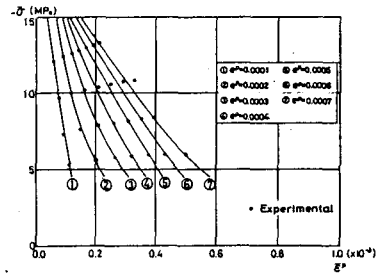


Fig.3 Experimental data of mean stress and volumetric plastic strain

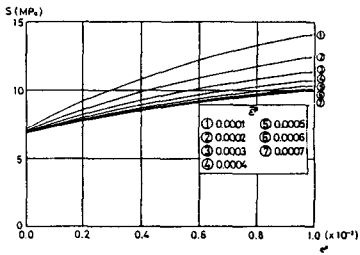


Fig.4 Curves of deviatoric stress response

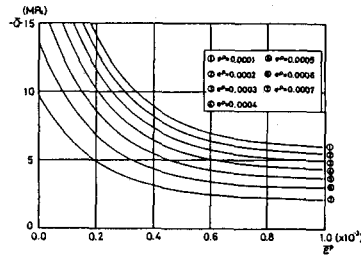


Fig.5 Curves of mean stress response

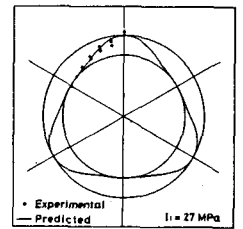


Fig.6 Peak yield surface in Π -plane

3.2 Θ の決定 Θ はその微分値が特異点を持たない¹⁾という条件より

$$\Theta(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i \cos^{i-1} 3\alpha \quad (14)$$

と決められる。 a_i は係数である。本研究では Θ を近似的に $\cos 3\alpha$ の2次の多項式で表すこととし、係数を最小二乗法で決定した。それより

$$\Theta(\alpha) = (121.78 + 17.75 \cos 3\alpha + 7.57 \cos^2 3\alpha) / 147.1 \quad (15)$$

となった。これをFig.6 に示す。

4. おわりに ベクトル型降伏関数を用いることによりん流れ則を仮定せず、増分形における弾塑性構成則の決定ができること、さらに偏差応力の回転角を含んだ型で表現できることがわかった。

5. 参考文献

- 1) Gudehus, G.: "Finite Element in Geomechanics", J. Wiley and Sons Ltd. (1977) pp.179-190.
- 2) Ichikawa, Y., Kyoya, T. and Kawamoto, T.: "Incremental Theory of Plasticity for Rock", Proc. 5th. Int. conf. Num. Meth. Geomech., Nagoya (1985).
- 3) 山本三三三: 「材料科学のための物体の変形学」, 誠文堂 (1979).