

神戸工業大学(正) 飛田 善雄
東北大学工学部(正) 柳澤 栄司

1. はじめに 砂の様な粒状体の変形・破壊挙動がその内部構造に大きく左右される事は周知の事実である。しかし、現在までに、初期異方性の応力・ひずみ特性に及ぼす影響を内部構造の変化より論じたものは存在しない様である。ここでは、コンタクト・テンソルを内部変数とするモデルを考え、初期異方性の応力ひずみ関係に及ぼす影響について、一つの計算結果を示す。方向性をもたない粒子のみを対象とする。

2. 内部変数としてのコンタクトテンソルと可べり運動に基づく構成関係

種々提案されているスプリングテンソルのうち、コンタクトテンソルを内部変数として用いる¹⁾コンタクトテンソルは、微視的接触面の確率密度関数 $\rho(\theta)$ と与えられる時、次式で、平面変形の場合、定義できる。(以下、平面変形の場合のみを考える)

$$C_{ij} = C_0 \int_0^{2\pi} \rho(\theta) n_i n_j d\theta \quad (1)$$

但し、 C_0 : 平均的接触面積密度、 n_i : 微小領域の方向余弦である。このコンタクトテンソルを用いて、任意の方向余弦を有する単位面積、単位厚さの平均的な接触面積 γ と単位 $S_{ij}^{(1)}$ と、その接触面が考えられている面とを角 ν^* は次の様に求められる。(図1参照)

$$S_{ij}^{(1)} = C_j \nu_j, \nu^* = \cos^{-1} \left(\frac{S_{11}^{(1)} \nu_1 + S_{22}^{(1)} \nu_2}{\sqrt{(S_{11}^{(1)})^2 + (S_{22}^{(1)})^2}} \right) \quad (2)$$

任意の面上で(2)式により求められる平均的接触面積 γ 、せん断力 τ の作用する方向に対して、上向きに存在する時、これを正とする($\nu^* > 0$)。この場合、面上のせん断力 τ と垂直力 σ_n を、接触面に沿って分割し、可べろうとする力 T と押さえる力 N を求めると、 $T/N < \tau/\sigma_n$ である事が理解できる。このため、 $\nu^* > 0$ の時、可べり運動は、平均的に生じにくい事が解る。逆に、平均的接触面が下向きになると、低い応力比でも、その面の可べり運動は生じ易い事が解る。(詳細は図1)

いま、ダイレタンシーを伴う単純せん断変形を考え、この運動を、最大主応力軸に関して対称な2つの基準面を用いて定式化する。このモデルは Double Shearing Model と呼ばれている。最大主応力軸より $45^\circ - \frac{\phi}{2}$

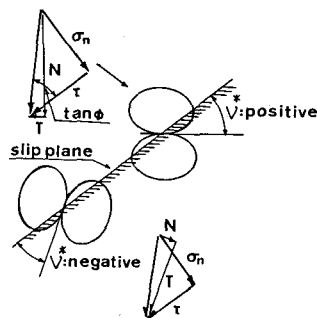


Fig.1 Definition of the angle of ν^*

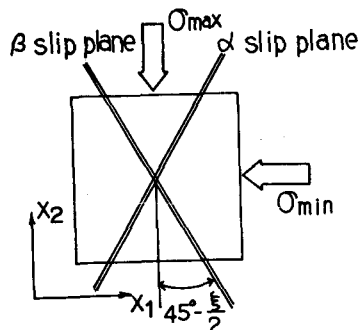


Fig.2 Double Shearing Model for Plane Deformation

をなす方向に2つの可べり運動の基準面が存在する時、変形速度 D_{ij}^p は、主応力軸を座標軸として、

$$\left. \begin{aligned} D_{11}^p &= -A \{ \cos(\xi - \nu_d) + \sin \nu_d \} (\dot{\gamma}^{(\alpha)} + \dot{\gamma}^{(\beta)}) \\ D_{12}^p &= A \{ \sin(\xi - \nu_d) \} (\dot{\gamma}^{(\alpha)} - \dot{\gamma}^{(\beta)}) \\ D_{22}^p &= A \{ \cos(\xi - \nu_d) - \sin \nu_d \} (\dot{\gamma}^{(\alpha)} + \dot{\gamma}^{(\beta)}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

但し $A = (1)/(2 \cos \nu_d)$, X_2 軸を最大主応力軸と一致させる。

ここに ν_d は、可べり面上でのダイレタンシーの程度を表し、 $\tan \nu_d = -\dot{\nu}/\dot{\gamma}$ ($\dot{\nu}$ は可べり面に垂直な膨張速度を示す。 $\dot{\nu}$ は膨張の時と負とする。) 実際、可べりの条件を満足し滑動する粒子の平均的運動方向を示す ν_d は、粒子間の固有摩擦角 ϕ と可べり面に作用する応力比 τ/σ_n を用いて、次式により決定する。

$$\left. \begin{aligned} \nu_d^{(\alpha)} &= \phi - \phi^{(\alpha)} \\ \phi^{(\alpha)} &= \tan^{-1}(\tau^{(\alpha)}/\sigma^{(\alpha)}) ; \tau^{(\alpha)} = \sigma^{(\alpha)} \nu_d^{(\alpha)} \mu^{(\alpha)}, \sigma^{(\alpha)} = \sigma^{(\alpha)} \nu_d^{(\alpha)} \nu_c^{(\alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

以下、考慮する応力状態は主応力状態にあるものと
する。この時、注目すべき事は(3)式による変形速度成
分は、一般には、主応力軸との共軸性を満足しない事
である。さて一般に、応力主軸とコンタクトテンソル
の主軸が一致しない時、最大主応力軸に関して対称な
2つの可変運動の基準面上の平均的接触面積の方向
は、 α, β 可変面上で異なり、その結果、前述の理由
から、 $\dot{\gamma}^{(a)}$ と $\dot{\gamma}^{(b)}$ は異なると考えるのが妥当である。
いま、可変面上でのせん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}^{(a)}, \dot{\gamma}^{(b)}$ を
共通に、可変面と平均的接触面積のなす角 ψ^* 、粒子
間の固有摩擦角 ϕ_μ 及び、可変面に作用する応力比
 $\tau^{(a)}/\sigma^{(a)} (= \tan \phi^{(a)})$ を用いて、次の様な双曲線型関係
式を規定する。

$$\dot{\gamma}^{(a)} = \left\{ a / (1 - b \eta^{(a)})^2 \right\} \dot{\eta}^{(a)} \quad (5)$$

$$\text{ここに、} \quad \eta^{(a)} = \tan \phi^{(a)} / \tan \phi_{cr}^{(a)} \quad (\phi^{(a)} \geq \phi_{cr}^{(a)})$$

$$\eta^{(a)} = \tan \phi / \tan (\phi_\mu + \psi^*) \quad (\phi^{(a)} < \phi_{cr}^{(a)})$$

但し、 $\tan \phi_{cr}^{(a)}$ は、最初 $\tan \phi \geq \tan (\phi_\mu + \psi^*)$ を
満足した時の値とする。 $(\psi^* < 0)$ 時、速やかにこの条件
が満足され、大きなせん断ひずみ速度が発生する。

3. コンタクトテンソルの移行則と構造変化による変形
速度 直接にコンタクトテンソルの移行則は与
えずに、Odaの観測に基づいて²⁾、接触面積の増加が、
最大主応力軸方向で δ_0 と異なると、以下、最大主応
力軸より θ となる方向では減少し 45° で増加はなくなる
ものとする。 x_2 軸と最大主応力軸と一致させ、又
増加する程度は、その方向の接触面積 πr の法線
成分(C_{22}, C_{11} 等)に反比例するものとし、且つ接触面
積の増加 $\delta \propto \cos 2\theta$ で与え、 $\dot{\sigma}_2 + \dot{\sigma}_1 = 0$ の平均
主応力一定の条件の許で、次の様に計算できる。

$$\dot{C}_{22} = \frac{\delta_0}{(C_{22})} \frac{\pi}{4} \dot{\sigma}_2$$

$$\dot{C}_{11} = \frac{\delta_0}{(C_{11})} \left[\frac{3}{4} \pi - 2 \right] \dot{\sigma}_1 \quad (6)$$

この様は構造変化により、粒接触の内部構造が変化
し、粒子間力の再配分が生じ、ひずみ硬化が生ずる事
になる。但し(6)式による構造変化は、可変面に平均的
に可変の条件を満足する場合(すなわち、 T/μ が
 $\tan \phi_\mu$ に等しくなる時)には、構造変化は(7)式を
常に満足する様に与えるものとする。(8)式)

$$\sigma_2 / \sigma_1 = K_\mu (C_{22} / C_{11}), \quad K_\mu = (1 + \tan \phi_\mu) / (1 - \tan \phi_\mu) \quad (7)$$

$$\dot{C}_{11} = \frac{1}{C_{11}} \left[\dot{C}_{22} C_{11} - \frac{(C_{11})^2}{K_\mu} \left\{ (\sigma_1 \dot{\sigma}_2 - \dot{\sigma}_1 \sigma_2) / (\sigma_1)^2 \right\} \right] \quad (8)$$

ここに、 $\dot{C}_{22}$ は(6)式により求める。

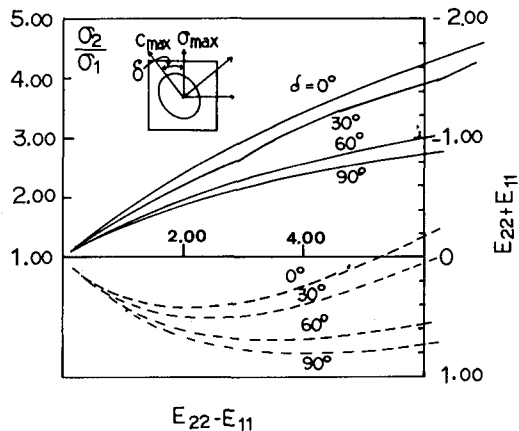


Fig.3 Calculation result on the effect of inherent anisotropy on deformation characteristics

構造変化による変形速度成分 D_{ij}^* は、等方性 α 弾性
関係式に異方性を加味した次式で与える。

$$\begin{Bmatrix} D_{11}^* \\ D_{22}^* \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_1 / C_{11} \\ \dot{\sigma}_2 / C_{22} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

(9)式において、 E 及び ν はひずみ履歴の影響を受け
変化するものと考えられるが、この計算では一定とし
た。(9)式は、くり返し載荷時の除荷時の体積圧縮挙動
を表現する事ができるが、構成関係としては不十分は
ものであり、更なる考察が必要である。

4. 計算例

コンタクトテンソルの主値 ϵ 、 $C_{max} = 1.2$ 、 $C_{min} = 1.0$
と正規化して、コンタクトテンソルの最大主軸と最大主
応力軸のなす角を $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の場合について計算
を行なった。可変面は最大主応力軸より 30° 方向に設
定した。用いたパラメータは $a = 0.01$ $b = 0.5$ (5式)
 $\phi_\mu = 26^\circ$ 、 $E = 9 \times 10^4$ (kPa) $\nu = 0.5$ (6式)、 $(\sigma_2 + \sigma_1) / 2$
 $= 200$ (kPa)、平均主応力一定の場合である。その結果
を図3に示す。但し図3では、 D_{ij}^* の存在は無視してい
る。図3より初期異方性により、応力・ひずみ特性が大
きく異なる事が示されている。

5. あとがき ここで述べた定式化は、既往の実験結
果とは矛盾しないが、(5)式~(9)式一定式化は、初期異
方性の応力・ひずみ特性に及ぼす影響を不可定式化の
一つであり、唯一のものではない。

1) 飛田・神澤(1985)第20回工管工学研究会名譽

2) Oda(1972): Soils & Fnds Vol. 12 No.2 PP 1~18.