III-205　粒状体の反対称応力テンソルについて

東洋大学工学部　正会員　岩本相一

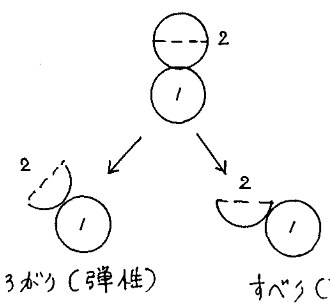
粒状体を構成してる粒子は有限の大きさをもち，各粒子の結びつきが粒子相互の接触力によるもののみであるから，いわゆる固体とは根本的に異なる振舞いをする。また，液体ほどには粒子間相互作用が切れていないから，いわゆる液体（流体）として取扱うこともできない。いわばこの両者の中間に位置すると言えよう。これは粒径を相当程度に小さくしても，粒状体の固有の性質（たとえば，ダイレイタンシーなど）は消去できないものと推測される。

問題を簡単にするために，ここでは差し当ってダイレイタンシーを考慮しないことにする。その意味は，接触している2つの粒状体を考えた場合，両者の相対運動はすべりと回転の2つであり，前者が塑性変形に，後者が弾性変形に寄与すると見なされる。例えば模式的に書くと，図−1のような相対変位である。この両者を併せて運動学的に解析することは一つの大きな課題であるが，ここでは一度加工硬化されてすべり成分を失ない，後者の弾性的性質のみを持つ粒状体を対象とする。
ここで言及する"弾性粒状体"とはこの意味である。

一般に（変形）物体に作用する応力テンソルは，

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}+\sigma_{ji}) + \frac{1}{2}(\sigma_{ij}-\sigma_{ji})$$
$$= \sigma_{(ij)} + \sigma_{[ij]} \qquad (1)$$

の如く，対称成分と反対称成分の和として表現される。いわゆる連続体では $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ であるから，$\sigma_{[ij]}=0$ である。しかし，ある程度の大きさで構成される粒状体の場合，かならずしも $\sigma_{[ij]}=0$ でない。これは，粒状体の変形異方性・強度異方性の実験データからも明らかである。理論的には，新保[1]が指摘している。従って，$\sigma_{[ij]}\neq 0$ ならば粒状体は反対称応力成分をもつことになる。この反対称成分の方の物理的な意味について若干の考察を試みる。以下は反対称成分のみを考察の対象とする。



図−1，ころがりとすべり

この場合に，Mac-Cullagh[2] の擬弾性モデルが当てはまるとすると，図−2において

$$M_3 = \sigma_{12}\frac{\Delta x_2}{2}\Delta x_3\Delta x_1 - \sigma_{21}\frac{\Delta x_1}{2}\Delta x_2\Delta x_3$$
$$= \sigma_{12}\,\Delta\tau = \frac{1}{2}k\varphi_3\,\Delta\tau \qquad (2)$$

ここで M：モーメント，Δx：デカルト座標の細片，$\Delta\tau$：体積素片，k：回転剛性率，φ：回転角である。よって

$$\sigma_{12} = -\sigma_{21} = \frac{1}{2}k\varphi_3,\quad \sigma_{23} = -\sigma_{32} = \frac{1}{2}k\varphi_1,\quad \sigma_{31} = -\sigma_{13} = \frac{1}{2}k\varphi_2 \qquad (3)$$

であり，これをつり合いの方程式に代入して（体積力は無いとする）

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x^3} = \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3} = -\frac{k}{2}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3}\right) = -\frac{1}{2}k\,\mathrm{rot}\,\vec{\varphi} \qquad (4)$$

ここで ρ：密度，v：速度ベクトル，t：時間である。さらに，ダイレイタンシーの効果もなく非圧縮であるとすると，

$$\left.\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{2} k \,\mathrm{rot}\, \vec{\varphi}, &\quad \mathrm{div}\, v = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\, v, &\quad \mathrm{div}\, \vec{\varphi} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

となり，これはよく知られている，以下のMaxwellの方程式に全く相似形をしている。対応は

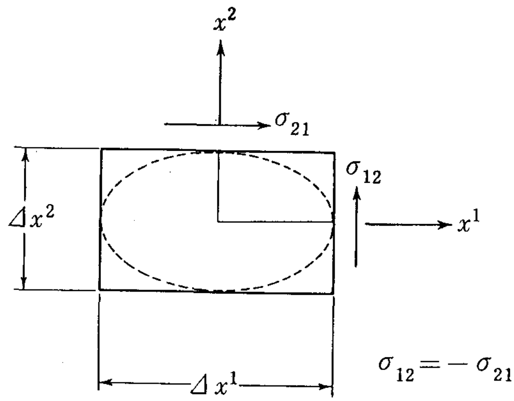
$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} &= \mathrm{rot}\, \mathbb{H}, &\quad \mathrm{div}\, \mathbb{E} = 0 \\ \mu_0 \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial t} &= -\mathrm{rot}\, \mathbb{E}, &\quad \mathrm{div}\, \mathbb{H} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

ここで，ε_0：真空中の誘電率，μ_0：真空中の透磁率，$\mathbb{E}$：電場の強さ，$\mathbb{H}$：磁場の強さ，c：真空中の光速度，$\varepsilon_0 \mu_0 = 4\rho/k = 1/c^2$ である。

これにより，粒状体で作られた空間が変位$\vec{\rho}$に対して剛性をもつとすると，Maxwellの方程式を満たす"弾性粒状媒体"というものが試みられる。

以上は応力についてであったが，さらに粒状体構成粒子の変位について述べる。

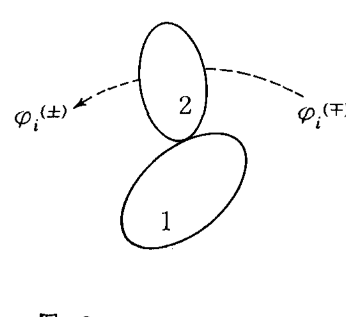
例えば図−3において粒子1に対する粒子2の相対変位は，左右どちらへも可能である。このような粒子の運動の適合性を考えると，粒子の相対運動の不確定性が十分に考えられる。即ち，粒状体集合のある箇所で生ずる不確定性はその後に続く運動の全てに影響を与える。従って，このような相対変位と相対運動量の不確定性は粒状体固有の性質と言わざるを得ない。ここで扱うような相対運動の変位・運動量の不確定性[3]は自然界によく見られることである。[5]



図−2，2次元での粒に対する応力状態

これについては筆者が既に指摘し，北村[4]は遷移確率の手法でそれを定式化し，確率過程の理論により，ここから粒状体の応力・ひずみ関係を求めている。

以上述べたことは，厳密には土質工学の範ちゅうに入らぬものかもしれない。いわば，粒状体の物理学ともいうべき範ちゅうのものかもしれない。



図−3，相対変位

参考文献

1) Shimbo, M. (1976): A Geometrical Formulation of Granular Media," Proc. of 26th Nat. Cong. for Applied Mechanics. 2) Sommerfelt, A. (1964): "Mechanics of Deformable Bodies [II, 15]," Academic Press. 3) 岩本相一 (1968): "粒状体の2次元流れ", 東大修士論文. 4) Kitamura, R. (1981): S&F. 5) マックス・ボルン (1951)