

東北大学工学部 正員 新聞 茂

1) はじめに

砂のような粒状体の力学において、最も重要な研究課題は、離散的な粒子の集団としての統計力学的(連続体力学的)挙動を支配する物理法則(構成法則)の確立である。松岡と中井¹⁾は、 π -平面上の種々の応力経路上の実験データを整理し、応力空間内のある平面上の垂直応力 σ_n に対するせん断応力の比 τ/σ_n とせん断歪増分 $d\gamma$ に対する垂直歪増分 $d\epsilon_n$ の比 $d\epsilon_n/d\gamma$ の間には固有な関係が存在することを見出し、この平面をSMP(空間滑動面)と名づけた。一方、著者は²⁾応力空間内の単位法線ベクトルに対して、 N -変換を導入し、変形に伴って生じる誘導異方性を消去した摩擦応力空間を導き、この空間内の単位球面上での τ/σ_n の値の分布の対称性とせん断滑動確率ベクトルを用いて、理論的観点からSMPと数学的に等価なOFP(Octahedral Friction Plane: 八面体摩擦面)を誘導し、SMPの統計力学的意味を明らかにした。本論文では、OFPの誘導過程を概説し、OFPまたはSMPの誘導過程より、応力テンソルと歪増分テンソルの共軸性が導かれることを示す。

2) OFP の誘導について

3つの主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を軸とする応力空間内の単位球面上の単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とする。このとき、粒状体内における単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ をもつ面上の垂直応力 σ_n 及びせん断応力では、それぞれ

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (2.1)$$

$$\tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 (4n_1^2 n_2^2) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 (4n_2^2 n_3^2) + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 (4n_3^2 n_1^2) \quad (2.2)$$

と記すことができる。上式(2.1)(2.2)より

$$\left(\frac{\tau}{\sigma_n}\right)^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 n_1^2 n_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 n_2^2 n_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n_3^2 n_1^2}{(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2} \quad (2.3)$$

ここで、次のような単位法線ベクトルの変換(N -変換)

$$N_1 = \sqrt{\sigma_1/\sigma_n} n_1, \quad N_2 = \sqrt{\sigma_2/\sigma_n} n_2, \quad N_3 = \sqrt{\sigma_3/\sigma_n} n_3 \quad (2.4)$$

を導入する。このときベクトル $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)^T$ は

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1 \quad (2.5)$$

を満足し、単位ベクトルとなっている。 N -変換により、式(2.3)は

$$\left(\frac{\tau}{\sigma_n}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sqrt{\sigma_2\sigma_3}}\right)^2 (4N_1^2 N_2^2) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2\sqrt{\sigma_3\sigma_1}}\right)^2 (4N_2^2 N_3^2) + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}\right)^2 (4N_3^2 N_1^2) \quad (2.6)$$

と書き換えられる。式(2.1)は $\mathbf{n}$ 方向の垂直応力 σ_n 、

また、式(2.2)は $\mathbf{n}$ を単位法線ベクトルとする平面上の

せん断応力を表わしているが、式(2.6)は、 $\mathbf{N}$ 方向の

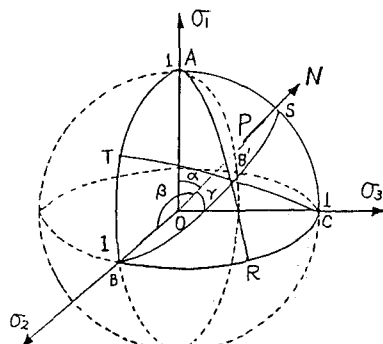


図-2-1

応力比を表わしているから、 $\mathbf{n}$ を単位法線ベクトルとする応力空間を $\mathbf{N}$ を単位法線ベクトルとする空間と区別し、後者を「摩擦応力空間」(図-2参照)と呼ぶ。上式(2.6)を

$$\frac{\tau}{\sigma_n} = \sqrt{\left(\left[\frac{\tau}{\sigma_n}\right]_{12}\right)^2 + \left(\left[\frac{\tau}{\sigma_n}\right]_{23}\right)^2 + \left(\left[\frac{\tau}{\sigma_n}\right]_{31}\right)^2} \quad (2.7)$$

$$\text{ただし} \quad \left[\frac{\tau}{\sigma_n}\right]_{12} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2\sqrt{\sigma_2\sigma_3}} (2N_1 N_2) \quad (2.8)$$

$$\left[\frac{\tau}{\sigma_n}\right]_{23} = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2\sqrt{\sigma_3\sigma_1}} (2N_2 N_3) \quad (2.9)$$

$$\left[\frac{\tau}{\sigma_n}\right]_{31} = \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}} (2N_3 N_1) \quad (2.10)$$

のように書き換えれば、 N_1, N_3 の関数である $[\tau/\sigma_n]_{13}$ はその関数形より明らかのように、図-2-1の $1/4$ 球面 ABC' 上で曲線 ASC に関して対称であり、また、 $N_1 = N_3$ ($\alpha = \beta$)となる曲線 BSB' に関して対称な分布形となっており、点 S において、最大値 $|\sigma_1 - \sigma_3|/(2\sqrt{\sigma_3\sigma_1})$ をとることに注意する。

一般に、砂のような粒状体は摩擦性材料と呼ばれ、粒子のせん断滑動確率は垂直応力 σ_n とせん断応力 τ の比によって支配されるものと考えられている。図-2-1の摩擦応力空間内の単位球面上の法線ベクトル $\mathbf{N}$ 方向のせん断滑動確率は、式(2.7)によって支配され、また、主応力成分 σ_1 と σ_3 だけに關するせん断滑動確率は、式(2.10)の $[\tau/\sigma_n]_{31}$ によって支配される。 $[\tau/\sigma_n]_{31}$ は N_1 と N_3 の関数であるから、せん断滑動の生じる確率は方向に依存するので、単位球面上にせん断滑動の生じる確率を表すベクトル $\mathbf{V}$ (「せん断滑動確率ベクトル」)を導入し、 $[\tau/\sigma_n]_{31}$ の値の分布の対称性を考慮して、摩擦応力空間内の単位球面の部分球面 ABC' 上の全てのせん断滑動確率ベクトルを

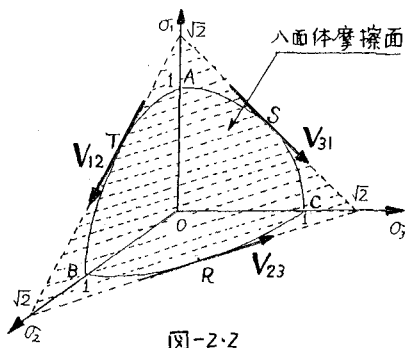


図-2-2

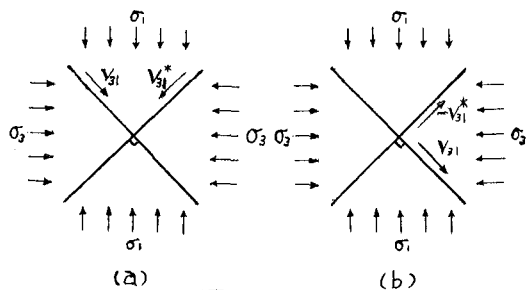


図-3-2

合成すれば、図-2.2の点Sにおいて、単位球面に接するベクトル V_{31} となる²⁾。換言すれば、 $[\gamma_{\sigma\sigma}]_{31}$ によるせん断滑動の効果は V_{31} によって代表させることができる。同様な考察を $[\gamma_{\sigma\sigma}]_{12}$ 及び $[\gamma_{\sigma\sigma}]_{23}$ に対しても行えば、それぞれ、せん断滑動確率ベクトル V_{12} , V_{23} が得られる。これら3つのベクトルは全て平面 $x+y+z=\sqrt{2}$ 上にあり、この平面上の単位法線ベクトルは

$$N_{OFP} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)^T \quad (2.11)$$

である。式(2.11)は、オ1象限内の平面であるが、 $[\gamma_{\sigma\sigma}]_{12}$, $[\gamma_{\sigma\sigma}]_{23}$, $[\gamma_{\sigma\sigma}]_{31}$ の対称性により、他の象限についても同様な平面が得られ、これらの平面は正八面体面(八面体摩擦面: OFP)を構成する。式(2.4)の N_{OFP} を式(2.4)において逆変換すれば¹⁾、松岡と中井の導入した SMP 上の単位法線ベクトル

$$n_{SMP} = \sqrt{\frac{I_2}{I_3}} \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}, \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}}, \frac{1}{\sqrt{\sigma_3}} \right)^T \quad (2.12)$$

が得られる。ただし、 I_2 , I_3 は応力テンソルのオ2, オ3不変量である。誘導過程から明らかなように、OFP または SMP は、離散的な粒子の集合体のせん断滑動の統計的代表面としての意味を有している。応力空間内の単位球面上での $[\gamma_{\sigma\sigma}]_{12}$, $[\gamma_{\sigma\sigma}]_{23}$, $[\gamma_{\sigma\sigma}]_{31}$ の値の分布には、ここで述べたような対称性は存在しないと及び式(2.12)より明らかなように、SMP 面は応力状態の変化に伴って変化するが、OFP 面は応力状態の変化によって変化せず、摩擦応力空間内に固定された面となっていることに注意する。

3) 応力テンソルと歪増分テンソルの共軸性について

応力状態が $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$

の場合、3つのモルの応力円が存在し、 σ_1 - σ_2 座標の原点より個々のモルの応力円に2本の接線を引くことができ、これらの

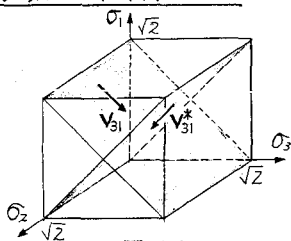


図-3-1

2本の接線は互いに共役な関係にある。例えば、 σ_1 - σ_2 軸上の点 σ_1 , σ_3 を通るモルの応力円の互いに共役な組の接線は、摩擦応力空間では、図-3-1に示すような互いに直交する共役な組の平面に対応しており、 V_{31}^* は V_{31} と共役な関係にあるせん断滑動確率ベクトルである。図-3.2(a)は、図-3-1を σ_2 軸の方向から見た場合であり、この図を図-3.2(b)のように書き換えても力学的意味は等価である。 $\|V_{31}\| = \|V_{31}^*\|$ であるから、図-3.1と図-3.2(a)(b)のせん断滑動確率ベクトルの方向から明らかなように、 $[\gamma_{\sigma\sigma}]_{31}$ は σ_1 と σ_2 軸及び σ_3 と σ_3 軸の作る平面に関して対称な確率で生じるせん断滑動、及びその結果としての対称な変形を引き起こすので、 $[\gamma_{\sigma\sigma}]_{31}$ に起因して生じる歪増分テンソルの2つの主軸は、それぞれ σ_1 及び σ_3 軸の方向に一致しなければならない³⁾。 $[\gamma_{\sigma\sigma}]_{31}$ によっては σ_2 軸方向の歪増分は生じないことに注意する。上記の結論は $[\gamma_{\sigma\sigma}]_{12}$, $[\gamma_{\sigma\sigma}]_{23}$ によるせん断滑動から生じる歪増分テンソルについても全く同様である。したがって、応力状態が $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ の場合に生じる変形は、 σ_1 と σ_2 軸、 σ_1 と σ_3 軸及び σ_2 と σ_3 軸がそれぞれ構成する平面に因り統計的に対称に生じ、応力テンソルと歪増分テンソルの主軸は共軸とならなければならない³⁾と考えられる。また、上述の解析は主応力軸が時間と共に変化する場合においても全く同様である。

しかしながら、上述の解析からは、境界などの拘束により、統計的に対称なせん断滑動が妨げられる場合には、応力テンソルと歪増分テンソルの共軸性は成立しないことになり、著者³⁾が以前、各々の載荷板が独立して自由移動の可能な光弾性せん断試験装置を設計して行った実験の結果及び考察と一致する。したがって、応力テンソルと歪増分テンソルの共軸性は離散的な摩擦性粒子の集合体が境界などから、せん断滑動を妨げられることなく、応力状態に対して連続体のように変形する場合の統計的秩序であると考えられる。

参考文献 (1) Matsuoka, H. & Nakai, T.: Proc. of JSCE, No. 232, 1974, pp. 57-70. (2) 新聞: 土木学会研究発表会, 1985 (3) 能坂, 佐武, 新聞: 土木学会第36回年次学術講演会講演要旨集, 1981 pp. 3-4.