

III-199 内部摩擦角を考慮した剛塑性有限要素法

建設省 正会員 ○ 角 哲 也
 京都大学工学部 正会員 小 林 昭 一
 京都大学工学部 正会員 田 村 武

1. はじめに

従来の有限要素法による土構造物の極限解析では、適当な応力—ひずみ関係のもとで与えられた荷重形式に対する応答履歴を追跡していく方法が一般的である。破壊状態に至るまでの構造物の挙動が明らかになるという利点もあるが、必要な材料定数の決定や破壊自体の定義等に種々の問題点を含んでいる。一方、極限状態のみに着目して、そのつりあい状態を解こうとする手法も考えられる。ここでは、その1つとして、剛塑性有限要素法を取り上げ、内部摩擦角 ϕ や、塑性ポテンシャルの角度 ψ を有する材料に対してその定式化を述べるとともに、いくつかの数値計算例を示す。

2. 上界法と塑性釣り合い式

Drucker-Prager 型の降伏関数は (1) で示され α, k は定数、応力 σ_{ij} に対して $I_1 = \sigma_{ii}$, $J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$, $S_{ij} = \sigma_{ij} - I_1 \delta_{ij} / 3$ である。いま降伏関数と塑性ポテンシャルが等しい Associated Flow Rule を想定すると塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ は Λ を未知定数として (2) で示される。この場合、体積塑性ひずみ速度 $\bar{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{ii}$ に関する制約条件式 (3) が考慮されなければならない。ここに、 $\bar{\epsilon} = \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}$, $\beta = 3\alpha / \sqrt{3\alpha^2 + 1}$ である。

ところで、塑性論の上界定理により、任意の運動学的許容なひずみ速度場 $\dot{\epsilon}_{ij} [= \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})]$ に対して (4) で定義される荷重強度 $\bar{P}$ は、真の極限荷重 P^* を下まわらないことが示される (5)。ここに、 $\dot{u}_i, T_i, X_i$ は、それぞれ変位速度、応力境界 S_σ 上の表面力および物体力である。また、 $D(\dot{\epsilon}_{ij}) = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$ は、ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ が与えられた時、それに対して Normality Rule を満足するような応力 σ_{ij} との積として定義され、エネルギー消散率と呼ばれる。これより P^* を求めるためには外力仕事を単位とする (6) 及び、ひずみ速度に関する (3) のもとで $\bar{P} = D(\dot{\epsilon}_{ij})$ の最小化を図ればよく、問題 (A) が示される。また $D(\dot{\epsilon}_{ij})$ は (2) より (7) で計算され、 $\gamma = k / \sqrt{3\alpha^2 + 1}$ である。つぎに、問題 (A) に対する解の必要条件を求めるために、Lagrange 乗数 λ, μ を導入して (8) の範囲関数 Φ の変分問題を考えると Φ の停留条件により、釣り合い式 (9)、及び応力境

$$f = -\alpha I_1 + \sqrt{J_2} \quad (=k) \quad (1)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \Lambda (-\alpha \delta_{ij} + S_{ij} / \sqrt{J_2}) \quad (2)$$

$$\bar{\epsilon}_0 + \beta \bar{\epsilon} = 0 \quad (3)$$

$$P \left\{ \int_V X_i \dot{u}_i dV + \int_{S_\sigma} T_i \dot{u}_i dS \right\} = \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}) dV \quad (4)$$

$$P^* \leq \bar{P} \quad (5)$$

$$(A) \quad \begin{cases} \bar{P} = \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}) dV \rightarrow \min \\ \text{sub. to } \int_V X_i \dot{u}_i dV + \int_{S_\sigma} T_i \dot{u}_i dS = 1 \\ \bar{\epsilon}_0 + \beta \bar{\epsilon} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$D(\dot{\epsilon}_{ij}) = \gamma \bar{\epsilon} \quad (7)$$

$$\Phi(\dot{u}, \lambda, \mu) = \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}) dV + \int_V \lambda (\bar{\epsilon}_0 + \beta \bar{\epsilon}) dV - \mu \left(\int_V X_i \dot{u}_i dV + \int_{S_\sigma} T_i \dot{u}_i dS - 1 \right) \quad (8)$$

$$\left\{ \gamma \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{\epsilon}} + \lambda (\delta_{ij} + \beta \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{\epsilon}}) \right\}_{,j} + \mu X_i = 0 \quad \text{in } V \quad (9)$$

$$\left\{ \gamma \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{\epsilon}} + \lambda (\delta_{ij} + \beta \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{\epsilon}}) \right\} n_j = \mu T_i \quad \text{on } S_\sigma \quad (10)$$

$$\dot{\epsilon}_{22} = \dot{\epsilon}_{33} = \dot{\epsilon}_{31} = 0 \quad (11)$$

$$I_1 = \frac{2}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{\gamma \alpha}{\sqrt{1 - \beta^2 \alpha^2}} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (12)$$

$$J_2 = \left\{ \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 \right\} / (1 - \beta^2 \alpha^2) \quad (13)$$

界条件 (10) が導かれる。ここで、平面ひずみ問題に限れば、条件式 (11) より導かれる (12) ,

(13) を、それぞれ (1) に代入すると (14) となり、これより Mohr-Coulomb の破壊規準 (15) との対応が (16) の関係式として示される。ここで、 ϕ 、 c は、それぞれ内部摩擦角、粘着力である。以上を離散化し、有限要素法として定式化して解くことになるが、釣り合い式が λ 、 λ に関して非線形となるため Newton-Raphson 法による逐次代入計算を行なう。

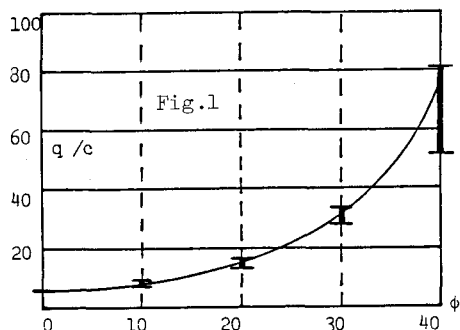
$$f = -3d \left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \right) + \sqrt{1-3d^2} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2} (=f_c) \quad (14)$$

$$c \cos \phi + \left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \right) \sin \phi = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (15)$$

$$\cos \phi = \frac{\sqrt{1-12d^2}}{\sqrt{1-3d^2}}, \quad c = \frac{f_c}{\sqrt{1-12d^2}} \quad (16)$$

$$g = c \cos \phi \left[e^{\pi \tan \phi} \tan^2 \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \phi \right) - 1 \right] \quad (17)$$

3. 数値計算例 ここでは浅い基礎の支持力問題を取り上げ、いま基礎底面は完全に滑らかとする。よく知られた Prandtl のすべり線に対して極限荷重 q は (17) で与えられ、一方、計算結果は Fig. 1 のように得られた。また、Non-associated Flow Rule の場合も同時に示されており、これは塑性ポテンシャルの内部摩擦角 ϕ に対して Associated Flow Rule を適用しながら、応力状態に応じて (1) の定数 k を変化させることにより得られる。各 ϕ に対する計算結果の上端は $\phi = \phi$ に、下端は $\phi = 0$ に相当している。Fig. 2-3 (a), (b) は、それぞれ、崩壊時の速度場、主応力である。



参考文献

- 1) T. Tamura, S. Kobayashi & T. Sumi : Limit Analysis of Soil Structure by Rigid Plastic Finite Element Method, Soils & Foundation, Vol. 24, No. 24, 1984.
- 2) W. F. Chen : Limit Analysis and Soil Plasticity, Elsevier, 1975.

