

1. まえがき

筆者らは、指数関数系の回帰式 $y = a\{1 - e^{-(x/b)^m}\} + C$, $y = ae^{-(x/b)^m} + C$ を用いて ①杭や地盤の載荷試験から得られる荷重・変位曲線^{(1)~(6)}, ②標準貫入試験から得られる打撃回数・累計貫入量曲線⁽⁷⁾⁽⁸⁾, ③一軸、三軸圧縮試験から得られる応力・ひずみ曲線⁽⁹⁾, ④構造物や盛土などの沈下量・時間曲線⁽¹⁰⁾, ⑤圧密試験から得られる間隙比・圧密圧力曲線⁽⁶⁾などの整理および評価を行っている。

上記回帰式における4つの回帰係数 m, a, b, C を求めるには、計算式の展開や計算方法などに若干の工夫が必要であり、これらについて文献(1)~(17)で述べた。

今回の報告は、飽和値 a と定数項 C が既知の場合の計算方法について述べたものである。今回を含め、これまでに報告した一連の計算方法により、回帰係数の種々の組合わせによる計算が可能となった。

2. 数学モデルと回帰係数の求め方

数学モデルは(1)式、(2)式で示される。

$$y = a\{1 - e^{-(x/b)^m}\} + C \quad m > 0 \text{ or } m < 0 \quad (1)$$

$$y = ae^{-(x/b)^m} + C \quad m < 0 \text{ or } m > 0 \quad (2)$$

ここに、 m, C は正あるいは負の、 a, b は正の符号をもつ値である。(1)式、(2)式は、それぞれ統計学で扱うワイブル分布曲線($m=1$ のとき指数分布曲線)、コーシー分布曲線に対応する。(1)式の y および C を a で割って規格化し、 $C/a = 0.1$ として m をパラメータとして描いたものが図-1である。

以下に、(1)式、(2)式の回帰係数のうち、飽和値 a と定数項 C を既知として、 m, b を求めるための式を展開するが、この2つの式はほぼ同じ操作をすることになるので、(1)式を中心に述べ、(2)式については特に必要な部分のみを列挙する。

(1)式の回帰モデルを(3)式とする。

$$y = a\{1 - e^{-(x/b)^m}\} + C + \varepsilon \quad \varepsilon: \text{誤差項} \quad (3)$$

残差平方和 $S(a, b, C, m)$ は、(3)式に n 組の測定値をあてはめて整理すれば、(4)式となる。

$$S(a, b, C, m) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - a\{1 - e^{-(x_i/b)^m}\} - C]^2 \quad (4)$$

(4)式の残差平方和 $S(a, b, C, m)$ が最小になるように、 m, b を推定することになる。

(4)式を b について微分し、その結果を0と置き整理

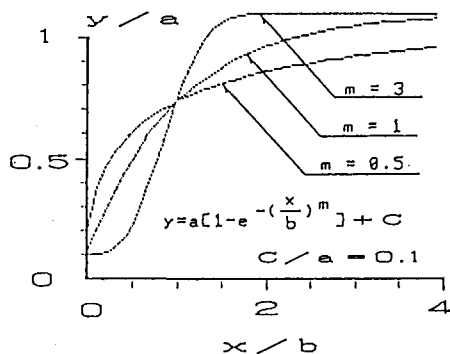


図-1 ワイブル分布曲線

すると、(5)式なる正規方程式が得られる。

$$f(a, b, C, m) \equiv F_7 - aF_5 - CF_6 = 0 \quad (5)$$

ここに、 $F_5 = \sum_{i=1}^n x_i^m e^{-(x_i/b)^m} \{1 - e^{-(x_i/b)^m}\}$, $F_6 = \sum_{i=1}^n x_i^m e^{-(x_i/b)^m}$, $F_7 = \sum_{i=1}^n x_i^m y_i e^{-(x_i/b)^m}$ である。

任意の m について、(5)式を解けば b を求めることができる。これは、Newton-Raphson法によって解くことができる。すなわち、反復関数(6)式を用いて、 b の初期値、収束精度を与えて収束計算すればよい。

$$b_{i+1} = b_i - \{f(a, b, C, m) / \partial f(a, b, C, m) / \partial b\}_{b=b_i} \quad (6)$$

ここに、

$$\frac{\partial f(a, b, C, m)}{\partial b} = \frac{m}{b^{m+1}} (F_8 - aF_{10} - CF_9) \quad (7)$$

$$F_8 = \sum_{i=1}^n (x_i^m)^2 y_i e^{-(x_i/b)^m}, \quad F_9 = \sum_{i=1}^n (x_i^m)^2 e^{-(x_i/b)^m}, \\ F_{10} = \sum_{i=1}^n (x_i^m)^2 e^{-(x_i/b)^m} \{1 - 2e^{-(x_i/b)^m}\} \quad \text{である。}$$

(6)式の収束値を用いて残差平方和 $S(a, b, C, m)$ を(4)式で求め、この値が最小になるような m を求めればよい。

(2)式についても同様の手順で収束計算を行なえばよい。ただし、この場合、(7)式を(7)式に置きかえる必要がある。

$$\frac{\partial f(a, b, C, m)}{\partial b} = \frac{m}{b^{m+1}} (F_8 - 2aF_{10} - CF_9) \quad (7')$$

ここに、 $F_3 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \{e^{-\frac{x_i}{b}}\}^2$,
 $F_0 = \sum_{i=1}^n \{x_i e^{-\frac{x_i}{b}}\}^2$, $F_2 \sim F_9$ は(5)

式、(7)式と同じである。

3. 計算例

杭径 1 m, 長さ 23.5 m のリ
 バース杭の鉛直載荷試験から得

られた荷重・変位曲線の関係に、(1)式を適用した計
 算例を示す。使用データは、図-2中の表に示した
 ものであり、 x は変位 (mm), Y は荷重 (tf) である。
 (1)式において、飽和値 $a=550$, 定数項 $C=50$ とし、
 m および b の収束精度を 1×10^{-6} として、6組の割
 定値をあてはめた結果、回帰係数 m , b , 残差平方
 和 SSR は、表-1の(6)の欄に示す値となった。

測定値を白丸でプロットし、この計算結果を描い
 たものが図-2である。また、表-1の(1)~(5)の欄
 は、それぞれ(1)式において、(1)は $C=0$ とした場合、
 (2)は(1)式そのもの、(3)は $C=0$, $a=600$ とした場
 合、(4)は $C=50$ とした場合、(5)は $a+C=600$ と
 した場合の計算結果である。なお、 b の収束計算に

は Newton-Raphson 法を用いているため、 b の初期値の与え方に注意する必要がある。初期値の設定がうまく
 いかない場合には、(5)式の値をプロットして見当をつけるなどしなければならない。

4. まとめ

(1)式、(2)式のような指数関数系の回帰式を用いて、まえがきで述べた①~⑤の曲線を主観を入れずに評価する
 手法を提案している。土質基礎工学で取り扱う現象には、この他にもまた似たような現象があり、それらにもこ
 の手法を適用できるものと思われる。今回は、飽和値 a と定数項 C が既知の場合の計算方法について述べたが、
 さらに報告した一連の計算方法により、 m , a , b , C 4つの回帰係数の様々な組合せによる計算が可能とな
 っている。また、 b を既知とした場合の計算方法も同様な式の展開を行えば、 a あるいは C は一義的に決定で
 きる。

参考文献

- 1) 宇都・冬木・近藤・桜井; ワイの載荷試験結果の一整理方法, 第13回土質工学研究発表会, 1978.
- 2) 塩井・宇都・冬木・近藤・桜井; 杭の荷重・変位曲線の非線形回帰結果による支持力の一評価法, オマ回土質工学シンポジウム, 1978.
- 3) 塩井・光宏・宇都・冬木・桜井; 杭の水平載荷試験での降伏点の評価法, 杭の水平載荷試験に関するシンポジウム, 土質学会, 1979.
- 4) 浅沼・福井・堀部・宇都・冬木・桜井; 各種施工法による杭の支持力について, 低振動・低騒音杭工法の施工法と支持力に関するシンポジウム, 土質学会, 1982.
- 5) 星田・宇都・冬木・桜井; ニューマチックケーソン内における平板載荷試験, 平板載荷試験に関するシンポジウム, 土質学会, 1979.
- 6) 宇都・冬木・桜井; 指数関数系の回帰式について, 第18回土質工学研究発表会, 1983.
- 7) 宇都・冬木・近藤・石塚; 標準貫入試験に関する基礎的研究(3), 第13回土質工学研究発表会, 1978.
- 8) 桜井・溝口・石塚・冬木・宇都; SPTの記録とその整理方法, サウンディングシンポジウム, 土質学会, 1980.
- 9) 石原・森・木村・宇都・冬木・桜井; 軟弱地盤における橋台水平移動の予測法, 第26回土質工学シンポジウム, 1981.
- 10) 石原・小野・有木・宇都・冬木・桜井; アプローチ方式橋台の長期沈下予測, 第24回土質工学シンポジウム, 1979.
- 11) 宇都・冬木・桜井; 載荷試験から得られる荷重・変位曲線の非線形回帰計算について(その1), オマ回関東支部年次研究発表会, 土学会, 1980.
- 12) 宇都; コンピュータの利用(主にパーソナルコンピュータを対象にして), 最近の土質基礎に関する諸問題講習会講演資料, 土質学会編, 1982.
- 13) 宇都・冬木・桜井; 載荷試験から得られる荷重・変位曲線の非線形回帰計算について(その2), 土学会オマ回年次学術講演会, 1982.
- 14) 宇都・冬木・桜井; 同上(その3), 土学会オマ回年次学術講演会, 1983.
- 15) 宇都・冬木・桜井; 指数関数系の回帰式について. その2. (飽和値 a が既知の場合), オマ回土質工学研究発表会, 1984.
- 16) 宇都・冬木・桜井; 載荷試験から得られる荷重・変位曲線の非線形回帰計算について. その4. (定数項 C が既知の場合), 土学会オマ回年次学術講演会, 1984.
- 17) 宇都・冬木・桜井; 指数関数系の回帰式について. その3. ($a+C$ = 一定の場合), オマ回土質工学研究発表会, 1985.

表-1 回帰係数

	(1) ⁽³⁾	(2) ⁽⁴⁾	(3) ⁽⁵⁾	(4) ⁽⁶⁾	(5) ⁽⁷⁾	(6)
M	0.755235	1.21630	0.857731	1.01856	1.22998	1.05667
A	657.726	517.545	600	564.386	513.302	550
B	3.28941	3.13527	2.61272	3.05721	3.10342	2.90297
C	0	85.9474	0	50	86.6982	50
A+C	657.726	603.492	600	614.386	600	600
SSR	2536.57	41.4271	3343.12	684.778	50.3461	799.391

C=0

C=0, A: fix

C: fix

A+C=K

A, C: fix

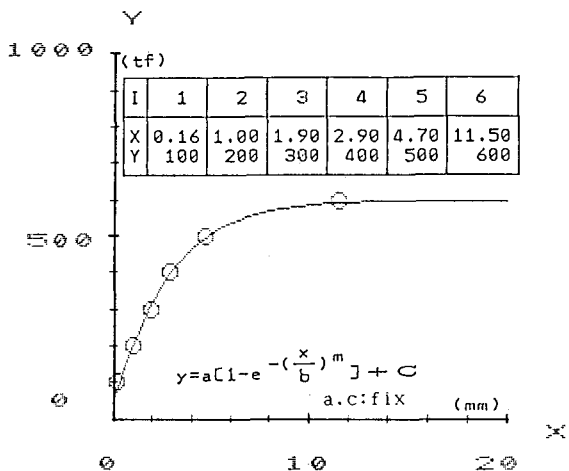


図-2 荷重・変位曲線のあてはめ