

名古屋大学 学員 ○ 臼 井 徹 弥
 名古屋大学 学員 大 塚 悟
 名古屋大学 正員 浅 岡 顕

1. はじめに

粘性土地盤上の盛土施工を考える時、極限荷重を算定する1つの方法に極限解析があげられる。設計でこの極限解析を行なう際に、強度定数の地盤内分布を確率論的(一意的)に与えるだけでは、自然地盤に本質的な「ばらつき」から考えて一面的にすぎることがある。本論文では、上界定理に基く剛塑性有限要素法を用いた確率論的な極限解析について報告する。本手法によれば、極限荷重の平均および分散を本質的に無限回の計算を要求するモンテカルロシミュレーションに替わってわずか数回の計算によって求めることが可能である。

2. 強度の地盤内分布 (Soil Profile) の確率論的記述

一般に自然地盤は、均質とみなされている地盤でも土の諸係数はかなりばらついている。また連続的に描かれる Soil Profile などはずかなデータからの結果にすぎず、無数通り考えられる。このような Soil Profile を確率論的に記述するためには、最低限、深さ z における cu の平均および分散と、 cu の深さ方向に沿う自己相関について示す必要がある(2次元モーメントランダムフィールド)。粘性土地盤の場合には、平均および分散は次に示す性質、(i) 平均、分散は深さによらず一定か、あるいは深さと共に直線的に増える。(ii) 変動係数(標準偏差/平均)は深さ方向に一定、を有していることが知られている。

これらの性質を満足するような平均、分散および自己相関を定めるために一階の自己回帰モデルを用いる。深さ z を $z_i = \Delta z \cdot i$ のように上から順に等間隔に離散化し、その非排水せん断強度を cu_i とする。そして、 $u_i = cu_i / z_i$ に対して次の自己回帰式による確率過程モデルをあてはめ、データの定常性を確認する。¹⁾

$$u_i = \alpha_0 + \alpha_1 u_{i-1} + \sigma_{\varepsilon_i} \quad \text{但し} \quad |\alpha_1| < 1, \quad E[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = \begin{cases} \sigma_{\varepsilon}^2 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (1)$$

定常性が確認されれば、自己回帰式から平均および分散、長だけ離れたデータ間の自己相関が次式で与えられる。

$$E[u_i] = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}, \quad \text{Var}[u_i] = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{1-\alpha_1^2}, \quad \gamma(k) = \gamma(j, j-k) = \frac{\text{Cov}[u_i, u_{i-k}]}{\sqrt{\text{Var}[u_i] \text{Var}[u_{i-k}]}} = \alpha_1^{|k|} \quad (2)$$

3. 等価多層系地盤の構成と確率論的極限解析

極限解析で関連流れ則を仮定すると、内部消散率は $\dot{\varepsilon}_{ij}$ の凸関数であることから、上界定理は load factor P (規準載荷形状 T_i の P 倍が正解の上界値である表面力 T_i と与える) の局所的最小化問題となる。Mises の降伏規準を用いれば、 P は平面ヒズミ条件では次式で表わされる (F_i は物体力を表わす)。

$$P = \int \sqrt{2} cu (\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij})^{1/2} dV - \int F_i \dot{u}_i dV \quad (3)$$

$$(T_i = P T_i', \quad \int_{S_0} T_i' \dot{u}_i dS = 1)$$

式(3)は、土の単位体積重量が cu に比較して確定量とみなされることから、 $(\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij})^{1/2}$ は Soil Profile $cu(z)$ の $z=0 \sim H$ (層厚) に沿う重み $f(z)$ とみなされる。そこで任意の $f(z)$ に対して P の平均および分散を等しくするように $cu(z)$ を離散化する(図1)。

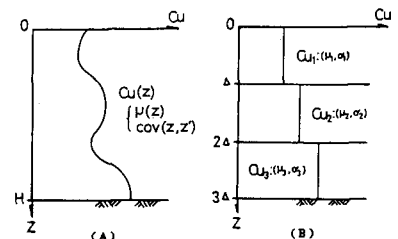


図1 Original地盤と等価多層系地盤

cu_1, cu_2, cu_3 は互いに独立な確率変数で、層厚の等しい層系のそれぞれの強度である。

$$Cov[cu_i, cu_j] = \begin{cases} \sigma_i^2 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (4)$$

等価多層系地盤での P の平均および共分散が任意の 2 次関数 $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ までは恒等的に Original な地盤に一致するようにすれば、次の連立方程式を得る (μ_j, σ_j^2 は各層での cu_j の平均および分散を表す)。

$$\begin{pmatrix} \int_0^H \mu(z) dz \\ \int_0^H \mu(z) z dz \\ \int_0^H \mu(z) z^2 dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & \Delta & \Delta \\ \frac{\Delta^2}{2} & \frac{3}{2}\Delta^2 & \frac{5}{2}\Delta^2 \\ \frac{\Delta^3}{3} & \frac{7}{3}\Delta^3 & \frac{19}{3}\Delta^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \int_0^H Cov[cu(z), cu(z')] dz dz' \\ \int_0^H Cov[cu(z), cu(z')] z dz dz' \\ \int_0^H Cov[cu(z), cu(z')] z z' dz dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta^2 & \Delta^2 & \Delta^2 \\ \frac{\Delta^3}{2} & \frac{3}{2}\Delta^3 & \frac{5}{2}\Delta^3 \\ \frac{\Delta^4}{4} & \frac{9}{4}\Delta^4 & \frac{25}{4}\Delta^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

この連立方程式を解けば、 P の平均と共分散を等しくする等価多層系地盤が得られ、 P は $cu(z)$ の範囲数であるにもかかわらず、 $cu_i (i=1,2,3)$ による離散的確率変数の関数 $P = g(cu_1, cu_2, cu_3)$ に変換された。この $g(cu_1, cu_2, cu_3)$ が cu_1, cu_2, cu_3 の 2 次モーメントまで良く近似できる。すなわち P が正規分布で良く近似できるのであれば、Rosenblueth の多点推定理論から、 P の平均および分散は cu_i をかえる 8 通りの計算から次のように得ることができる。

$$E[P] \approx \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 P_i, \quad Var[P] \approx \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 P_i^2 - (E[P])^2 \quad (6)$$

但し、 $P_i = g(\mu_1 \pm \sigma_1, \mu_2 \pm \sigma_2, \mu_3 \pm \sigma_3)$ である。

4. 等価多層系地盤による極限解析事例と考察

以上の所論より、図 2 に示す地盤 (A) は深さ方向に平均、分散が一定、(B) は深さ方向に線形的に増加していく場合 (変動係数が一定) を解析した。解析結果は表 1 に示すが、 $k(\pm, \pm, \pm)$ は $cu_1 = \mu_1 \pm \sigma_1, cu_2 = \mu_2 \pm \sigma_2, cu_3 = \mu_3 \pm \sigma_3$ での極限荷重である。また、比較に無数通り考えられる Soil Profile の平均を確定的に与えた場合についても解析した。表から解析事例 (A), (B) は共に多点推定理論による極限荷重の方が小さい結果が得られた。

極限荷重は確率過程 $cu(z)$ の範囲数である。このような確率過程の連続的な範囲数では、確率モーメントを直接手軽に求める方法は著者の知る限り十分に与えられていない。本論文で関数 $cu(z)$ を離散化したのはこの事情による。確率変数の関数の確率モーメントの推定に関しては、一般に Taylor 展開の第 1 次近似を用いて次式で与えられるのであるが、

$$E[qu] \approx k(\mu_1, \mu_2, \mu_3), \quad Var[qu] \approx \sum_{i=1}^3 \frac{\partial k}{\partial \mu_i} (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \sigma_i^2 \quad (7)$$

偏導関数など容易に求められず、Rosenblueth の多点推定理論を用いたのはこのためである。Rosenblueth 法は関数 $g(cu_1, cu_2, cu_3)$ が cu_1, cu_2, cu_3 の 3 次形式で記述できる時までには正解を与えることが示されているのに対し、Taylor 展開の方法は線形式の時しか正解を与えない。したがって、Taylor 展開による方法の方が (計算が 1 回で済み楽なのではあるが) 本論文の方法より危険側の極限荷重を与えると考えておかなければならない。

(参考文献) 1) Asaoka, A. & Matsuo, M.: "A Simplified Procedure for Probability-Based $\phi_u = 0$ Stability Analysis", Soils and Foundations, 1982

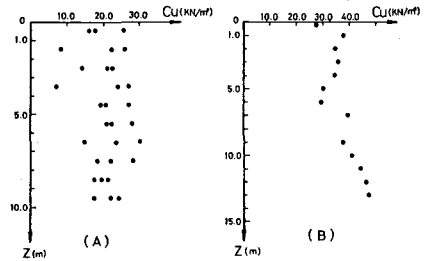


図 2 非排水せん断強度のデータ

	A	B
$k(+++)$ (KN/m²)	132.622	178.298
$k(++-)$	122.216	174.389
$k(+ +-)$	104.378	157.927
$k(+ - -)$	102.441	158.410
$k(- ++)$	95.340	114.891
$k(- +-)$	91.370	110.613
$k(- - +)$	87.148	123.815
$k(- - -)$	87.368	124.635
Rosenblueth 法による		
平均 (KN/m²)	102.866	142.872
標準偏差	15.529	25.584
Soil Profile を		
$\mu(z)$ とした時の極限荷重	109.357	157.101
μ_1, μ_2, μ_3 とした時の極限荷重	109.357	158.804

表 1 多点推定理論および確定的方法による極限荷重