

大成建設(株) ○正会員 岩野 政浩
 大成建設(株) 正会員 泉 博允
 京都大学 正会員 村上 章

1. はじめに 土の構造骨格と間隙流体の相互作用を考慮した二相系地盤における動的な変形・応力解析については、Biot¹⁾が示した多孔質弾性体中を伝播する波動理論をもとに、種々の研究^{2), 3), 4)}がなされている。これらの研究は、対象とする問題(特に液状化現象に着目)に応じて、有意な仮定を設定し、実験等に基づく弾塑性理論の導入・展開に一方の主眼がおかれているのが現状である。また、Biotの理論に表われる応力-歪関係の定数と土の物理定数との関係、Biotの理論と有効応力の概念の関係については、既に石原、岡らが詳しく論じている。しかしながら、その基本的な支配方程式の展開、有限要素法への定式化を示し、基本的性状を論じたものは少なく、本論文はこうした現状を背景に二相系地盤における動的有効応力解析について考察を加えたものである。

2. 理論的展開 地盤を二相系の混合体として取扱う事は、飽和土の動的な運動を解析する上で本質的なものであり、応力-浸透連成問題と同様の考え方に基づけば、Biotの基本式に準ずる必要がある。さらにBiotの基本式に有効応力の原理を適用し、以下に示す式①~④を基本式とするのが一般的である。(原式を若干変形)

$$\delta_{ij,j} + \bar{P}^s \cdot b_i^s = \bar{P}^s \cdot \ddot{u}_i + b(\ddot{u}_i - \dot{u}_i) \quad \text{①} \quad \delta_{ij,j}^f + \bar{P}^f \cdot b_i^f = \bar{P}^f \cdot \ddot{u}_i - b(\ddot{u}_i - \dot{u}_i) \quad \text{②}$$

$$\delta_{ij}^s = \delta_{ij}^s + (1-n) \cdot \delta_{ij} \cdot \pi \quad \text{③} \quad \delta_{ij}^f = n \cdot \delta_{ij} \cdot \pi \quad \text{④}$$

δ_{ij}^s : 構造骨格に働いている応力 u_i : 構造骨格の変位 $\bar{P}^s$: 構造骨格のみかけの単位体積重量

δ_{ij}^f : 間隙水部分に働いている応力 u_i : 間隙水の変位 $\bar{P}^f$: 間隙水のみかけの単位体積重量

δ_{ij}^s : 構造骨格に働いている粒子間応力 b : 相互作用パラメーター π : 間隙水圧 n : 間隙率 b_i : 物体力
 式①と式②を加え合わせ変形すると、 $\delta_{ij,j} + \bar{P} b_i^{s+f} = \bar{P} \cdot \ddot{u}_i + \bar{P}^f \cdot \dot{u}_i$ ⑤となる。

δ_{ij} : 混合体に作用している応力 (= $\delta_{ij}^s + \delta_{ij}^f$) $\bar{P}$: 混合体としての平均の単位体積重量 (= $\bar{P}^s + \bar{P}^f$)

w_i : 構造骨格と間隙水の相対変位 (= $n(u_i - u_i)$) $\bar{P}^f$: 間隙水の単位体積重量 (= $\bar{P}^f/m$)

また、式②を間隙水圧と相対変位を未知数として変形すると

$$\pi_{,i} + \bar{P}^f \cdot b_i^f = \bar{P}^f \cdot \ddot{u}_i + \frac{1}{\alpha} \bar{P}^f \cdot \dot{w}_i + \frac{1}{\alpha} \cdot \dot{w}_i \quad \text{⑥となる。} \alpha \text{ は工学的透水性係数を示す。}$$

基本式においては、混合体の運動を固体相(単位体積重量: $\bar{P}^s$)と液体相(単位体積重量: $\bar{P}^f$)というふたつの連続体の相の運動の重ね合わせで表現しているが、これらの相の表現は抽象的であるため、よりとらえやすい連続体の運動として表現したものが式⑤、⑥である。式⑤は、混合体を構造骨格と間隙水の平均化された連続体としてとらえ、式⑥は、間隙水の運動は一般化されたダルシーの法則で記述されることを示したものである。

Ghaboussi⁷⁾は、式⑤⑥を運動方程式とし、有効応力の原理、構成関係、適合条件を以下のように設定し、初期境界値問題として、二相系地盤における動的有効応力解析を行い、弾性問題における基本的性状を検討している。

有効応力の原理: $\delta_{ij} = \delta_{ij}^s + \alpha \cdot \delta_{ij} \cdot \pi$ ⑦ α : 飽和不飽和パラメーター

構成関係: $\delta_{ij}^s = D_{ijkl} e_{kl}$ ⑧ $\pi = M(\xi + \alpha \cdot \delta_{ij} \cdot e_{ij})$ ⑨ D_{ijkl} : 弾性係数テンソル

適合条件: $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ ⑩ $\xi = w_{,i,i}$ ⑪ M : 水の圧縮率

3. 離散化 Ghaboussi⁷⁾は式⑤~⑪を基本式として Miklinの変分原理に基づく汎関数法を用いて有限要素法による離散化を示しているが、本論文においては、Gelarkin法による離散化手法を示し、応力・変位を前の時間ステップに対する増分形で表わす事で、今後の弾塑性問題への適用に有意な形で表現する。

式⑦~⑪を式⑤、⑥に代入し、Gelarkin法を適用すると各々式⑫、⑬となる。

$$\sum_{a=1}^{N_0} \int_{V_a} N_n [D_{ijkl} (Nmd \bar{u}_{kl}^m)_{,ij} + (\alpha^2 M \delta_{ij} Nmd \bar{u}_{kl}^m)_{,kl} + (\alpha M \delta_{ij} Nmd \bar{w}_{,kl}^m)_{,kl} + \delta_{ij,j}^s + \pi_{,j} + \bar{P} b_i^{s+f} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{P} \cdot N m \bar{u}_{kl}^m) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{P}^f N m \bar{w}_{,kl}^m)] dV_a = 0 \quad \text{⑫}$$

$$\sum_{a=1}^{N_0} \int V_a \bar{N}_n \{ (\alpha M \delta_{ij} N_m d\bar{U}_k^m), k_i + (M \bar{N}_m, d\bar{U}_k^m), k_i + \pi^0, i + f^f b^f i \\ - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (f^f N_m \bar{U}_k^m) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\frac{1}{n} f^f \bar{N}_m \bar{U}_k^m) - \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{k} \bar{N}_m \bar{U}_k^m) \} dV_a = 0 \quad (13)$$

式(13), (14)に Gauss の発散定理を用いて部分積分を行い整理すると,

$$K_{nm}^{ik} d\bar{U}_k^m + C_{nm}^{ik} d\bar{U}_k^m + {}^{ss}M_{nm} \frac{d^2}{dt^2} \bar{U}_k^m + {}^{sf}M_{nm} \frac{d^2}{dt^2} \bar{U}_k^m = F_n^i - \sum_{a=1}^{N_0} \int V_a N_{n,j} \delta_{ij}^0 dV_a - \sum_{a=1}^{N_0} \int V_a N_{n,j} \pi^0 dV_a \quad (14)$$

$$A_{nm}^{ik} d\bar{U}_k^m + E_{nm}^{ik} d\bar{U}_k^m + {}^{fs}M_{nm} \frac{d^2}{dt^2} \bar{U}_k^m + {}^{ff}M_{nm} \frac{d^2}{dt^2} \bar{U}_k^m = G_n^i - \sum_{a=1}^{N_0} \int V_a \bar{N}_n, j \pi^0 dV_a \quad (15)$$

ここで, $N_n, \bar{N}_n$: 内挿関数 $dU_i(x, t) = N_n(x) \cdot d\bar{U}_i^n(t), d\bar{U}_i(x, t) = \bar{N}_n(x) \cdot d\bar{U}_i^n(t)$ ($i=1, 2, 3$ $n=1, 2, \dots, n_0$)

$$\delta_{ij}^0, \pi^0: \text{前ステップの応力テンソル} \quad K_{nm}^{ik} = \sum_{a=1}^{N_0} \int V_a (N_{n,j} \delta_{ij}^0 N_{m,k} + N_{n,j} d^2 M \delta_{ij}^0 N_{m,k}) dV_a$$

$$C_{nm}^{ik} = \sum_{a=1}^{N_0} \int V_a N_{n,j} \alpha M \delta_{ij}^0 \bar{N}_{m,k} dV_a \quad {}^{ss}M_{nm} = \sum_{a=1}^{N_0} \int V_a N_n \bar{f} N_m dV_a \quad {}^{sf}M_{nm} = \sum_{a=1}^{N_0} \int V_a N_n f^f \bar{N}_m dV_a$$

$$A_{nm}^{ik} = \sum_{a=1}^{N_0} \int V_a \bar{N}_n, i \alpha M \delta_{ij}^0 N_{m,k} dV_a \quad {}^{fs}M_{nm} = \sum_{a=1}^{N_0} \int V_a N_n f^f N_m dV_a \quad {}^{ff}M_{nm} = \sum_{a=1}^{N_0} \int V_a \bar{N}_n \frac{1}{n} f^f \bar{N}_m dV_a$$

$$E_{nm}^{ik} = \sum_{a=1}^{N_0} \int V_a \bar{N}_n, i M \bar{N}_{m,k} dV_a \quad H_{nm} = \sum_{a=1}^{N_0} \int V_a \bar{N}_n \frac{1}{k} \bar{N}_m dV_a$$

$$F_n^i = \sum_{a=1}^{N_0} \int V_a N_n \bar{p} b_i^{sf} dV_a + \oint_{sa} N_n \hat{T}_i dS_a + \oint_{sa} N_n \hat{\pi} dS_a \quad G_n^i = \sum_{a=1}^{N_0} \int V_a \bar{N}_n f^f b_i^{sf} dV_a + \oint_{sa} \bar{N}_n \hat{\pi} dS_a$$

次に式(16), (17)に示すような時間項に関する展開を行, て式(14), (15)を変形しマトリックス表示すれば式(18)となる.

$$\frac{d^2}{dt^2} \{U\}_t + \theta \Delta t = \frac{1}{\beta \theta^2 \Delta t^2} \{dU\}_t + \theta \Delta t - \frac{1}{\beta \theta \Delta t} \frac{d}{dt} \{U\}_t + (1 - \frac{1}{2\beta}) \frac{d^2}{dt^2} \{U\}_t \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} \{U\}_t + \theta \Delta t = \frac{\beta}{\beta \theta \Delta t} \{dU\}_t + \theta \Delta t + (1 - \frac{\beta}{\beta}) \frac{d}{dt} \{U\}_t + (1 - \frac{\beta}{2\beta}) \theta \Delta t \frac{d^2}{dt^2} \{U\}_t \quad (17)$$

$$\left\{ \frac{1}{\beta \theta^2 \Delta t^2} \begin{Bmatrix} {}^{ss}(M) & {}^{sf}(M) \\ {}^{fs}(M) & {}^{ff}(M) \end{Bmatrix} + \frac{\beta}{\beta \theta \Delta t} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (H) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (K) & (C) \\ (A) & (E) \end{Bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} dU \\ d\bar{U} \end{Bmatrix}_t + \theta \Delta t$$

$$= \begin{Bmatrix} F \\ G \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} (K) & (C) \\ (A) & (E) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \bar{U} \end{Bmatrix}_t - \left\{ (1 - \frac{\beta}{\beta}) \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (H) \end{Bmatrix} - \frac{1}{\beta \theta \Delta t} \begin{Bmatrix} {}^{ss}(M) & {}^{sf}(M) \\ {}^{fs}(M) & {}^{ff}(M) \end{Bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{\bar{U}} \end{Bmatrix}_t - \left\{ (1 - \frac{\beta}{2\beta}) \theta \Delta t \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (H) \end{Bmatrix} + (1 - \frac{1}{2\beta}) \begin{Bmatrix} {}^{ss}(M) & {}^{sf}(M) \\ {}^{fs}(M) & {}^{ff}(M) \end{Bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{\bar{U}} \end{Bmatrix}_t \quad (18)$$

式(18)を適切な境界条件・初期条件のもとで後退代入によりとけば解が得られる.

4. 解析例 成層地盤において非排水条件での弾性解析結果

を図-1, 2に示す. 解析は最大加速度振幅 100 gal, 周期 1 秒の調和入力とし, $\Delta t = 0.005$ 秒で 4 秒間共振応答を実施した. 図-1 に解析モデル, 物性条件, $t = 1.5$ 秒における間隙水圧分布を示す. この図より間隙水圧の値は小さいが, 分布は対称性を示し, また領域内での総和がゼロとなり, 領域全体として体積歪が生じてない様子がわかる. 図-2 は節点 A の水平加速度, 要素 B の間隙水圧の系時変化を示したものであるが, 加速度は共振応答を示し, 間隙水圧は定常となっている. これよりせん断変形は増大していくが, 土と水の相互作用による体積変化はせん断変形とは独立に定常となる事を示している.

5. あとがき 本手法は二相系地盤の動的有効応力解析に非常に有効である事が認識され, 現在, 地盤の非線形性・ダイラタンシー現象の導入を実施している. 最後に, 本研究に対し貴重な御助言を頂いた京都大学・大西有三助教授に深く感謝します.

<参考文献> 1) Biot, M. A (1956) J. A. S. Ame Vol 28 No. 2
2) 村上章 (1980) 京大修論 3) 後藤 岡・関口 (1979) 京大防研年報 第 22 号
4) Zienkiewicz (1980) I. S. S. C. T. L / Swansea / 5) 石原: 土質動力学の基礎
6) 岡 (1980) J. S. C. E 第 299 号 7) Ghaboussi (1971) EERC 71-6

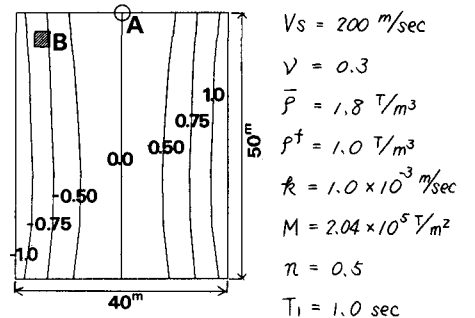


図-1 解析条件と間隙水圧分布図($t=1.5$ 秒)

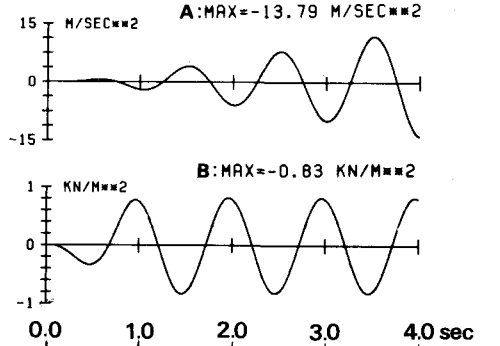


図-2 加速度と間隙水圧の系時変化