II-373 構造物周辺の波と流れの数値計算について

中央大学 学生員 ○樫山 和男
中央大学 正 員 川原 睦人

1．はじめに

本報告は、構造物周辺の波と流れの数値計算法の一解法として，有限要素法を用いる方法を提案するものである。この方法は，波の場の解析には，境界型有限要素法と境界要素法の結合解法を適用し，流れの場の解析には，二段階陽的有限要素法を適用する方法である。数値計算例として，円柱構造物周辺の波と流れの数値計算を行なった例について述べる。

2．基礎方程式

波の場の解析には，ゆるやかな水深変化を許容するマイルドスロープ方程式を用いる。

$$(CC_g\eta_{,i})_{,i} + \omega^2\frac{C_g}{C}\eta = 0 \qquad in\ \Omega \tag{1}$$

ここで，η：振幅分布関数，C：波速，C_g：群速度，ω：角振動数である。また，Ωは解析領域を表わす。波速、群速度は、次の分散関係式から求まる。

$$\omega^2 = gk\tanh kh \tag{2}$$

ここで，g：重力加速度，k：波数，h：水深である。境界条件としては，次式が導入される（図1参照）。

$$\eta_{,n} = \frac{\partial\eta}{\partial n} = \hat{\eta}_{,n} \qquad on\ \Gamma_S \tag{3}$$

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial\eta}{\partial r} - ik\eta\right) = 0 \qquad on\ \Gamma_\infty \tag{4}$$

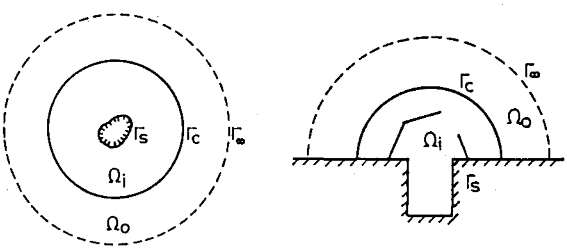

図1．領域平面図

ここで，r：構造物からの距離，Γ_S：構造物境界，Γ_∞：無限遠の仮想境界である。また，＾は既知量を表わす。

一方，流れの場の解析には，ラジエーション応力を考慮した平均流に関する運動方程式と連続式を用いる。

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + g\zeta_{,i} + \frac{S_{ij,j}}{\rho(h+\zeta)} + \frac{C_f}{h+\zeta}u_i - A_\ell(u_{i,j}+u_{j,i})_{,j} = 0 \tag{5}$$

$$\dot{\zeta} + \{(h+\zeta)u_i\}_{,i} = 0 \tag{6}$$

ここで，u_i：平均流速，ζ：水位変動量，S_{ij}：ラジエーション応力，C_f：海底摩擦係数，A_ℓ：水平拡散係数である。ラジエーション応力S_{ij}は，波の場の計算結果から得られる振幅分布関数ηを用いて，次式から計算される[1]。

$$S_{ij} = \frac{\rho g}{4}\left\{Re\left[\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\frac{\partial\eta^*}{\partial x_j}\right]\frac{1}{k^2}\left(1+\frac{2kh}{\sinh 2kh}\right) + \delta_{ij}\left[|\eta|^2\frac{2kh}{\sinh 2kh} + \frac{2kh\cosh 2kh - 1}{2k^2}\left(\left|\frac{\partial\eta}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial\eta}{\partial y}\right|^2 - k^2|\eta|^2\right)\right]\right\} \tag{7}$$

ここで，Re：実数部分，η^*：振幅分布関数ηの共役複素数である。

境界条件としては，次のものが導入される。

$u_i = \hat{u}_i \quad on\ S_1 \quad (8)$，$\zeta = \hat{\zeta} \quad on\ S_2 \quad (9)$，$r_i = A_\ell(u_{i,j}+u_{j,i})n_j = \hat{r}_i \quad on\ S_3 \quad (10)$

ここで，S_1, S_2, S_3はそれぞれの境界条件が既定される境界を表わす。また，r_iは粘性項を部分積分することによって生じる表面力であり，n_jは方向余弦である。

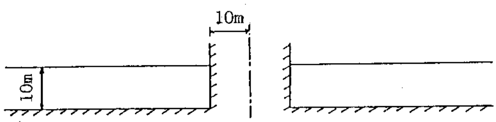

図 2 (a) 構造物断面図

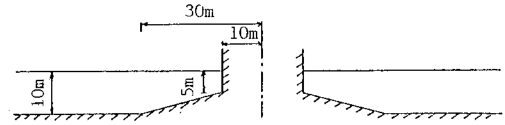

図 2 (b) 構造物断面図

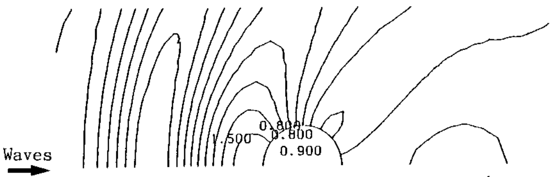

図 3 (a) 波の振幅分布の計算結果 unit:m

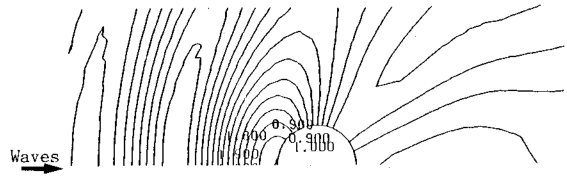

図 3 (b) 波の振幅分布の計算結果 unit:m

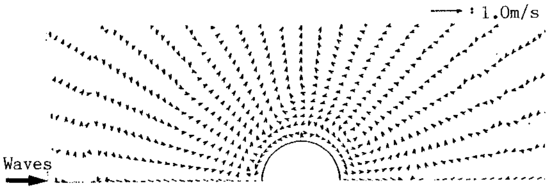

図 4 (a) 流れの計算結果

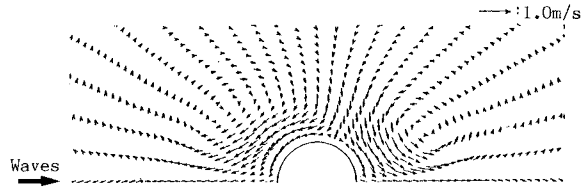

図 4 (b) 流れの計算結果

3．数値計算法

波の場の解析は，解析領域を内部領域 Ω_i と外部領域 Ω_o とに分け，内部領域には境界型有限要素法を，外部領域には無限遠方の放射条件を満足するように境界要素法を用いる結合解法によって離散化を行なう[2]。境界型有限要素としては，各要素内でヘルムホルツ方程式の解を満足する内挿多項式をもつ三節点三角形要素を用いる。一方，境界要素としては，線形の内挿多項式をもつ二節点の線要素を用いる。

流れの場の解析は，空間方向の離散化にはガラーキン有限要素法を，時間方向の離散化には二段階陽的スキームを用いる方法によって行なう[3]。有限要素としては，線形の内挿多項式をもつ三節点三角形要素を用いる。

4．数値計算例

数値計算例として，図2(a)，(b)に示すような半径10mの円柱構造物周辺の波と流れの解析を行なった。計算に用いた要素分割図の要素総数は3840，節点総数は1968である。図3(a)，(b)に計算された波の振幅分布が示されている。計算条件として，入射波の周期10秒，振幅1.0mとした。境界条件としては，円柱表面上で完全反射の条件 $\eta_{,n}=0$ とした。この波の場の計算結果から，(7)式によりラジエーション応力を算定し，流れの計算を行なった結果が図4(a)，(b)に示されている。これは，ほぼ定常状態に達した2000ステップにおける計算結果である。計算条件としては，水平拡散係数 $A_\ell=5.0\,m^2/s$，海底摩擦係数 $C_f=0.01$，微小時間増分量 $\Delta t=0.05$ 秒，混合比 $e=0.8$ とし，非砕波の条件で計算を行なった。また，境界条件としては，開境界で表面力 $t_i=0$ とした。図より，(a)の場合のように屈折の影響が入らない場合には，円柱構造物周辺に有意な流れは存在しないことがわかる。

5．おわりに

本報告によって，構造物周辺の波と流れの数値計算法が提案された。本手法の特徴は，問題に課せられる境界条件の取り扱い，境界形状の近似，および重複波におけるラジエーション応力の算定が合理的に行なえる点が上げられる。

〈参考文献〉
1) Mei,C.C. : A note on the averaged momentum balance in two-dimensional water waves, J. Marine Res. 31, pp.97-104, 1973.
2) Kashiyama, K. and Kawahara, M. : Boundary type finite element method for surface wave problems, Proc. JSCE. (submitted).
3) Kawahara, M. and Kashiyama, K. : Selective lumping finite element method for nearshore current, Int. J. Numer. Methods Fluids 4, pp.71-97, 1984.