II-270　透水層中の有限振幅浅水波

室蘭工業大学　学生員　倉内　公嘉
室蘭工業大学　正会員　近藤　俶郎

1．まえがき

多孔質の透水層中の水面を，抵抗を受けて伝播する水波の性質を知ることは，非定常地下水や透過性防波構造物による波の変形の理論的基礎として重要である。従来，この種の理論は長波，あるいは浅水波のいずれの場合も１次のオーダーの小振幅波を対象にしている[1) 2)]。本報は，直立透水層による有限振幅波の変形を解明する手段として，有限振幅浅水波の理論を展開するものである。

2．既往の理論による問題点

透水層を有する構造物の波の反射率や伝達率などを推定する理論的方法は，種々提案されており，ある程度の精度が得られている。筆者らは，直立透水層を有する不透過構造物の模型を用いて，波高H，水深ｈを一定として周期Ｔを変化させて反射率を測定し，それに対する長波理論ならびに浅水波理論による理論値を定常流の抵抗係数から非線形摩擦抵抗を得る方法によって求め，両者の比較を行った[3)]。それによると，浅水波理論においても，入射波長に対する水深の比 h/Lが約 0.3付近まで，波形勾配 H/Lが約 0.018付近までは，実験値と理論値は，かなり近似度が良いが，それ以後においては，それ以前に比べて近似度が悪くなっている。そこで，その原因を境界条件式における非線形項の無視による影響であると考えた。

3．透水層内における境界条件式

透水層内におけるｘ，ｚ方向の運動方程式は，それぞれ次のように表される。

$$\frac{\tau}{\lambda}\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - f\frac{\sigma}{\lambda}u \qquad \cdots(1)$$

$$\frac{\tau}{\lambda}\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - f\frac{\sigma}{\lambda}w - g \qquad \cdots(2)$$

ここに，ｇは重力加速度，ρは密度，ｕ，ｗはそれぞれｘ，ｚ方向に対する流速，ｐは圧力，λは空隙率，τは一種の慣性係数，ｆは線形化した抵抗係数である。上式を積分することによって，力学的境界条件の式が得られる。

水表面（$z=\eta$）における運動学的条件，及び，水底（$z=-h$）における条件は，それぞれ，

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \lambda\frac{D\eta}{Dt} \qquad \cdots(3) \qquad\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \qquad \cdots(4)$$

と表される。

4．有限振幅波による透水層中の波形の２次近似[4)]

(1)，(2) 式の運動方程式より，$z=\eta$における力学的条件式が次のように求められる。

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\tau}{\lambda}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right) + f\frac{\sigma}{\lambda}\Phi + g\eta = \text{const.} \qquad \cdots(5)$$

ここに，$\mathbf{v}=\nabla\Phi$である。(5)式および水表面における運動学的条件である(3) 式より，

$$\frac{\tau}{\lambda}\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \mathbf{v}\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) + \mathbf{v}\nabla\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)\right\} + f\frac{\sigma}{\lambda}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\Phi\right) + \frac{g}{\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \qquad \cdots(6)$$

となり，

$$\mathbf{v}\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Phi) = \mathbf{v}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial\mathbf{v}^2}{\partial t} \qquad \cdots(7)$$

を使って，

$$\frac{\tau}{\lambda}\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)\right\}+f\frac{\sigma}{\lambda}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\mathbf{v}^2\right)+\frac{g}{\lambda}\Phi_z = 0 \qquad (z=\eta) \qquad \cdots(8)$$

が得られる。η_n を η の n 次の微小量として，

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \cdots \qquad \cdots(9)$$

と表し，Φ を η に関してテーラー展開することによって，(8)式と (5)式の1次のオーダーの項はそれぞれ，

$$\frac{\tau}{\lambda}\Phi_{1tt} + f\frac{\sigma}{\lambda}\Phi_{1t} + \frac{g}{\lambda}\Phi_{1z} = 0 \qquad \cdots(10)$$

$$\frac{\tau}{\lambda}\Phi_{1t} + f\frac{\sigma}{\lambda}\Phi_1 + g\eta_1 = 0 \qquad \cdots(11)$$

となり，Φ_1 に関するラプラスの式を満たす解は，A_r を複素定数として，次のように表される。

$$\Phi_1 = \sum_{r=0}^{\infty} A_r e^{i(\bar{k}_r x+\sigma t)}\frac{\cosh \bar{k}_r(z+h)}{\cosh \bar{k}_r h} \qquad \cdots(12)$$

$$\eta_1 = -i\frac{\sigma}{g\lambda}(\tau-if)\sum_{r=0}^{\infty} A_r e^{i(\bar{k}_r x+\sigma t)} \qquad \cdots(13)$$

ただし，$\bar{k}_r h \tanh \bar{k}_r h = \frac{\sigma^2 h}{g}(\tau-if)$

次に，(8)式の2次のオーダーの項をとると，

$$\frac{\tau}{\lambda}\{\Phi_{2tt}+\Phi_{1ttz}\eta_1+\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_{1x}^2+\Phi_{1z}^2)\}+f\frac{\sigma}{\lambda}\{\Phi_{2t}+\Phi_{1tz}\eta_1+\Phi_{1x}^2+\Phi_{1z}^2\}+\frac{g}{\lambda}(\Phi_{2z}+\Phi_{1zz}\eta_1) = 0 \qquad \cdots(14)$$

となる。Φ_2 についてのラプラスの式を満たす周期解は，A_{2r}を複素定数として，

$$\Phi_2 = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r} e^{2i(\bar{k}_r x+\sigma t)}\cosh 2\bar{k}_r(z+h) \qquad \cdots(15)$$

と書ける。(14)式に(12)，(13)，(15)式を代入して，

$$\Phi_2 = -i\sum_{r=0}^{\infty}\frac{A_r^2}{\sigma}\frac{\bar{k}_r^2}{\lambda}\frac{\tau(1+2\lambda)-if(1+\lambda)}{\cosh^2 \bar{k}_r h(4\tau\sinh^2 \bar{k}_r h+2if)}\cosh 2\bar{k}_r(z+h)e^{2i(\bar{k}_r x+\sigma t)} \qquad \cdots(16)$$

を得る。

次に (5)式において p = 0 とおいて2次のオーダーの項をとると，

$$g\eta_2 = -\frac{\tau}{\lambda}(\Phi_{2t}+\eta_1\Phi_{1tz}) - \frac{\tau}{2\lambda}(\Phi_{1x}^2+\Phi_{1z}^2) - f\frac{\sigma}{\lambda}(\Phi_2+\Phi_{1z}\eta_1) + \text{const.} \qquad (z=0) \qquad \cdots(17)$$

これより，

$$\eta_2 = -\frac{1}{g\lambda^2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{A_r^2\bar{k}_r^2}{\cosh^2\bar{k}_r h}\left[\frac{(2\tau-if)\{\tau(1+2\lambda)-if(1+\lambda)\}}{4\tau\sinh^2\bar{k}_r h+2if}\cosh 2\bar{k}_r h + (\tau-if)\sinh^2\bar{k}_r h - \frac{\tau\lambda}{2}\right] e^{2i(\bar{k}_r x+\sigma t)} \qquad \cdots(18)$$

が得られる。

今後は，x方向の境界条件などによって定数を定め直立透水層堤などの波の変形に関する解を求める所存である。

<参考文献> 1)近藤・竹田：消波構造物，森北出版，1983.
2)井島・奥薗・湯村・坂井：遊水部を持つ直立消波防波堤と護岸，第19回海講論文集，1972.
3)近藤・倉内：直立透水層堤の反射率推定に関する基礎的考察，道支部論文報告集，1985.
4)富永：海洋波動，共立出版，1976.