

京都大学防災研究所 正員 ○山下 隆 男
 京都大学防災研究所 正員 土屋 義 人
 京都大学大学院 学生員 今塩屋 宏 之

1. 緒 言

海岸工学における外力には、砕波帯内の波浪や氾濫段波の伝播等によって代表されるように、散逸性、分散性及び非線形性によって支配される波動場を取り扱う場合が多い。従来、この種の現象は、boreモデルのように、質量、運動量の保存則とエネルギー散逸率とにともつぎ、跳びを許した解析によるモデル化が行なわれて来た。

本研究では、散逸性及び非線形性が釣り合う場での定形進行波解をもつBurgers 方程式を正準系とし、これにK-dV方程式の分散項を付加したK-dV・Burgers 方程式を誘導し、bore frontの伝播、変形を検討する。

2. K-dV・Burgers 方程式の誘導

河床勾配 $S = \tan \theta$ の開水路流れの基礎式は、平均流速 u と水深 h とによって次式で表わされる。

$$h_t + uh_x + hu_x = 0, \quad (1) \quad u_t + uu_x + g' h_x = g' S - C_f \frac{u^2}{h} + \nu_e u_{xx}. \quad (2)$$

ここに、 C はChezy 係数、 $g' = g \cos \theta$ 及び ν_e は渦動粘性係数である。

上式についてBurgers 方程式の相似則を満たすG-M 変換、 $\xi = \varepsilon(x - \lambda t)$ 、 $\tau = \varepsilon^2 t$ 、を行ない、未知変数 (u, h) を微小パラメータ ε で展開すると、

$$O(\varepsilon^2); (\lambda_0 - A_0)U_\xi^{(1)} = 0, \quad (3) \quad O(\varepsilon^3); (-\lambda_0 I + A_0)U_\xi^{(2)} + U_\tau^{(1)} + (U^{(1)} \cdot \nabla_u A_0)U_\xi^{(1)} + K_0 U_{\xi\xi}^{(1)} = 0, \quad (4)$$

ここに、 $A_0 = \begin{bmatrix} u_0 & h_0 \\ g' & u_0 \end{bmatrix}$ 、 $U^{(1)} = (h^{(1)}, u^{(1)})$ 、 $U^{(2)} = (h^{(2)}, u^{(2)})$ 、 $\nabla_u = (\frac{\partial}{\partial h}, \frac{\partial}{\partial u})$ 、 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

行列 A の左及び右固有ベクトルを L 、 R とすると、スカラー関数 $\phi(\xi, \tau)$ を用いて、 $U = \phi(\xi, \tau)$ R と表わされ、 U についての代数方程式(4) が解を持つための条件は、

$$L \cdot [U_\tau^{(1)} + (U^{(1)} \cdot \nabla_u A_0)U_\xi^{(1)} + K_0 U_{\xi\xi}^{(1)}] = 0.$$

これを、 ϕ の式に書き直すと、次のBurgers 方程式が導かれる。

$$\phi_\tau + 2 \frac{\lambda_0 - u_0}{h_0} r^* \phi \phi_\xi + \frac{\lambda_0 - u_0}{g} \{ \phi_\tau + 2 (\frac{\lambda_0 - u_0}{h_0})^2 r^* \phi \phi_\xi - \frac{\nu_e (\lambda_0 - u_0)}{h_0} \phi_{\xi\xi} \} = 0,$$

$$h_\xi^{(1)} = r^* \phi_\xi, \quad u_\xi^{(1)} = \frac{\lambda_0 - u_0}{h_0} r^* \phi_\xi.$$

これを水位変動 h で表示し、移動座標系 (ξ, τ) から再び固定座標系 (x, t) に戻した方程式に、K-dV 方程式の分散項を導入して、これと非線形性及び散逸性との釣り合う方程式 (K-dV・Burgers) として、次式を考えることとする。

$$h_t + (C_0 + u_0)h_x + \frac{3C_0}{2h_0} h h_x + \frac{1}{6} C_0 h_0^2 h_{xxx} = \frac{\nu_e}{2} h_{xx}. \quad (5)$$

3. Undular boreの発生条件

さて、式(5)は若干の操作の後、変数 (ξ, h) に対して $(\zeta, \eta) = (\alpha \xi, \beta h)$ を定義し、 $d\eta/d\zeta = g = \omega$ 、 $d\omega/d\zeta = f$ を満たすように、 g, f を決めると、次式のような常微分方程式に変形される。

$$\eta_{\zeta\zeta} - \mu \eta_\zeta + \eta^2 - \eta = 0 \quad (6) \quad \text{ここに、} \alpha = \frac{1}{h_0} \sqrt{6 \{ (U - u_0)/C_0 \} - 1}, \quad \beta = \frac{9}{2h_0^2 \alpha^2}, \quad \mu = \frac{3\nu_e}{C_0 h_0^2 \alpha}.$$

式 (6) から, $(\eta, \omega) = (0, 0), (1, 0)$ の 2 つの特異点があることがわかり, 前者はポテンシャルが極大となる鞍形点で, 後者は μ の値に依存して, 渦状点・結節点となる。特に, $\mu = 0$ ($v_e = 0$) の場合には渦心点, すなわちポテンシャルが極小で安定な平衡点となり, 孤立波やクノイド波のそれに対応する。また, v_e が大きい場合には undular bore は発生せず, その限界は渦状点と結節点との分岐条件として,

$$\frac{3v_e}{C_0 h_0} = 2\sqrt{6} \{U - (C_0 - u_0)/C_0\}. \quad (7)$$

を得る。ここに, v_e を bore 背後の (u, h) の関数と仮定し, 水理実験により, v_e を推定することは可能である。また, 式 (5) を数値計算することによっても発生する undular-bore の特性を調べることができ分散項にファクター (0.0, 0.1, 1.0) をかけて, 分散項に Crank-Nicholson 法, 非線形項に修正

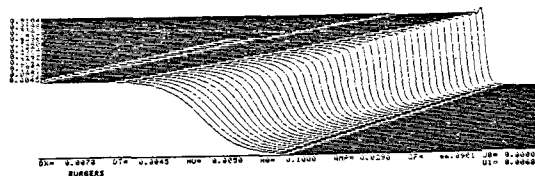
Euler 法を適応した陰解法によって, 数値計算を行った結果を図-1 に示す。計算条件は $H/h=0.28$ であり undular bore の生ずる領域である。図から明らかに, 何れの場合にも振動解がみられるが, 分散項の強さに応じて, 振動の振幅, 周期が異なることから, 水理実験等の併用によって, そのオーダーを決定することが可能であろう。

4. Bore-front の衝突数値シミュレーション

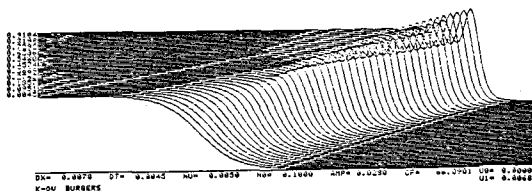
Burgers 方程式のキンク解を初期境界条件として与え, 式 (1), (2) を直接数値計算することで, 互いに逆方向に伝播する振幅の異なる Burgers soliton の衝突のシミュレーションが行なえる。図-2 は完全陰解法によって得られた結果の一例であり, Burgers soliton の特性として知られているような衝突時の解の吸収性がシミュレートされることが確認される。

5. 結 語

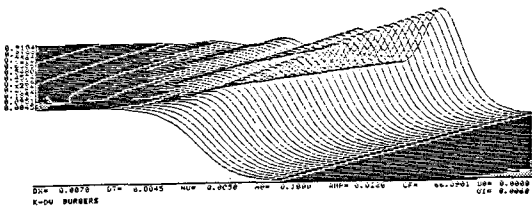
以上, 段波として伝播する碎波や氾濫水の先端部の場の方程式として, $K-dV \cdot$ Burgers 方程式を誘導し, 振動解の発生及び front の衝突を検討した。その結果, 分散性のオーダー及び渦動粘性係数の推定を行なうため, 水理実験を援用して, これらを決定していくことで, これまで便宜的な取り扱いをしていた, 氾濫水先端部の挙動や碎波変形を記述する場の方程式として適用することができるものと考えられる。



(a) fac=0.0



(b) fac=0.1



(c) fac=1.0

図-1 Undular bore の発生

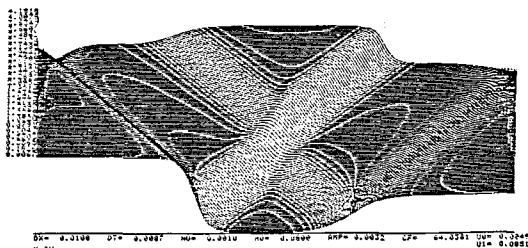


図-2 Burgers soliton の衝突