

東京大学 大学院 学生員 池谷 毅

東京大学 工学部 正 員 玉井 信行

1. 序 河道内の3次元流れは河川工学上の種々の問題と密接な関係があり、その理解は重要な問題である。本報では河道の曲がり、河床及び川幅の変化を考慮した解析解を提示する。

2. 解析の対象と座標系 水路の兩岸は垂直、河床、川幅の変化は滑らかであるとする。図1に示した解析領域を直方体領域に変換する次の座標変換を用いる。記号は図1参照。

$$y^1 = \int_0^{x^1} \frac{A}{\pi} \cos \theta dx^1 - M_2 \sin \theta, \quad y^2 = \int_0^{x^1} \frac{A}{\pi} \cos \theta dx^1 + M_2 \cos \theta$$

$$y^3 = (y_s^3 - y_b^3) x^3 + y_b^3, \quad M_2 = (B + b) \frac{x^2}{\pi} + d \cos x^2$$

3. 解析 $\theta, b, d, y_b^3, y_s^3$ は以下の形で表現する。

$$\theta = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \cos i x^1, \quad b = B + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \cos i x^1, \quad d = \sum_{i=0}^{\infty} d_i \cos i x^1, \quad y_b = \bar{y}_b - S \frac{A}{\pi} x^1 + h_b$$

$$y_s = \bar{y}_b - S \frac{A}{\pi} x^1 + H + h_s, \quad h_b = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \cos \{ j(x^2 - \pi/2) \} h_{bci,j} \cos i x^1$$

$$h_s = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \cos \{ j(x^2 - \pi/2) \} [h_{sci,j} \cos i x^1 + h_{ssi,j} \sin i x^1]$$

対象とする流路が繰り返して存在すると考え、解を以下の形に仮定する。

$$u^1 = u_0^1 + u_1^1 = u_0^1 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \cos \{ j(x^2 - \pi/2) \} [u_{ci,j}^1 \cos i x^1 + u_{si,j}^1 \sin i x^1]$$

$$u^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sin \{ j(x^2 - \pi/2) \} [u_{ci,j}^2 \cos i x^1 + u_{si,j}^2 \sin i x^1]$$

$$u^3 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \cos \{ j(x^2 - \pi/2) \} [u_{ci,j}^3 \cos i x^1 + u_{si,j}^3 \sin i x^1]$$

ここに u^1, u^2, u^3 は流速のそれぞれ x^1, x^2, x^3 方向の反変成分である。

流路全体の平均量からの偏差量は小さいとして、2次以上の項を省略すると連続式及び運動方程式は以下の式になる。

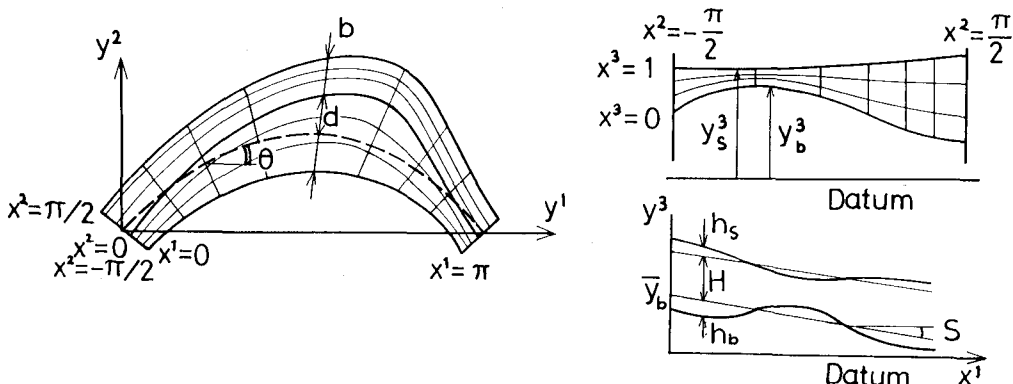


図1 解析対象と座標系

$$u_0^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ -\frac{Bx^2}{A} \frac{\partial \theta}{\partial x^1} + \frac{b-B}{B} - \frac{\pi d}{B} \sin x^2 + \frac{(h_s - h_b)}{H} \right\} + \frac{\partial u_1^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3} = 0, \quad -\frac{\partial}{\partial x^3} (gy^3 + \frac{P}{\rho}) = 0$$

$$u_0^1 \frac{\partial u_1^1}{\partial x^1} + u^3 \frac{\partial u_0^1}{\partial x^3} - \frac{Bx^2}{A} \frac{d^2 \theta}{(dx^1)^2} u_0^1 u_0^1 = \left(\frac{\pi}{A} \right)^2 g \left(-S \frac{A}{\pi} + \frac{\partial h_s}{\partial x^1} \right) + 2 \frac{\pi BGS}{A^2} x^2 \frac{d\theta}{dx^1} \\ + \frac{\nu_t}{H^2} \left[\frac{\partial^2 u_1^1}{(\partial x^3)^2} + \frac{\partial^2 u_0^1}{(\partial x^3)^2} \left\{ -2 \frac{(h_s - h_b)}{H} \right\} \right]$$

$$u_0^1 \frac{\partial u^2}{\partial x^1} + \left\{ \frac{A}{B} \frac{d\theta}{dx^1} + \frac{1}{B} \frac{d^2 b}{(dx^1)^2} x^2 + \frac{\pi}{B} \frac{d^2 d}{(dx^1)^2} \cos x^2 \right\} u_0^1 u_0^1 = - \left(\frac{\pi}{B} \right)^2 g \frac{\partial h_s}{\partial x^2} + \frac{\nu_t}{H^2} \frac{\partial^2 u^2}{(\partial x^3)^2}$$

ここに p ; 圧力, g ; 重力加速度, ν_t ; 渦動粘性係数である。 ν_t は水深方向に一定とした。なお, 水平方向の分布を解析に取り込むことは容易であるが, ここでは一定とした。

また境界条件は以下の通りとする。

$$x^3 = 1 \quad p = 0, \quad \partial u^1 / \partial x^3 = 0, \quad \partial u^2 / \partial x^3 = 0,$$

$$x^3 = 0 \quad u^1 = \frac{\pi \beta}{A} \sqrt{GHS} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^1}{\partial x^3} \frac{x^3}{du_0^1/dx^3} - \frac{1}{2} \frac{h_s - h_b}{H} + \frac{1}{2A} x^2 \frac{d\theta}{dx^1} \right), \quad u^2 = \frac{\pi \beta}{A} \sqrt{GHS} \frac{\partial u^2 / \partial x^3}{du_0^1/dx^3}, \quad u^3 = 0$$

ここに β は定数である。

Gottlieb (1976) と同様な手順で解を求めると以下の形となる。

$$u_0^1 = \frac{\pi g H^2 S}{\nu_t A} \left\{ x^3 - \frac{1}{2} (x^3)^2 \right\} + \frac{\pi \beta}{A} \sqrt{GHS}$$

$$u_1^1 = \int - \left[u_0^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ -\frac{Bx^2}{A} \frac{\partial \theta}{\partial x^1} + \frac{b-B}{B} - \frac{\pi d}{B} \sin x^2 + \frac{(h_s - h_b)}{H} \right\} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \right] dx^1$$

$$u_{c_{ij}^2}^2 + E u_{s_{ij}^2}^2 = c_{ij0}^{2p} + c_{ij1}^{2p} x^3 + c_{ij2}^{2p} (x^3)^2 + c_{ij3}^{2p} (x^3)^3 + c_{ij4}^{2p} (x^3)^4 + c_{ij1}^{2h} e^{a^{0ij} x^3} + c_{ij2}^{2h} e^{-a^{0ij} x^3}$$

$$u_{c_{ij}^3}^3 + E u_{s_{ij}^3}^3 = c_{ij0}^{3p} + c_{ij1}^{3p} x^3 + c_{ij2}^{3p} (x^3)^2 + c_{ij3}^{3p} (x^3)^3 \\ + c_{ij1}^{3h} e^{a^{1ij} x^3} + c_{ij2}^{3h} e^{-a^{1ij} x^3} + c_{ij3}^{3h} e^{a^{2ij} x^3} + c_{ij4}^{3h} e^{-a^{2ij} x^3}$$

ただし $E = \sqrt{-1}$, $c_{ij0}^{2p} \sim c_{ij4}^{3h}$ は係数。 h_b については複雑な式となるため省略する。

4. 解析例 解析例として

$S = 0.001$, $B = 30.0 \text{ cm}$, $H = 1.8 \text{ cm}$,

$\theta = 0.5 \cos x^1$, $b = d = 0$,

$h_b = h_{b0} \cos(x^2 - \pi/2) \sin x^1 \text{ cm}$

において $h_{b0} = 0$ 及び $h_{b0} = 1$ に対して計算した u_{s11}^2 , u_{c11}^2 を図2に示す。これをみると h_b の値が大きくなると深掘れ部から深掘れ部へ向かう流れが強くなることがわかる。

参考文献

Gottlieb, L. (1976) : Series Paper No.11 Inst. Hydrodynamics and Hy. Eng. Tech. Univ. of Denmark.

図2 計算例 (u_{c11}^2 及び u_{s11}^2)

