

防衛大学校 土木工学教室 正会員。山 田 正
防衛大学校 土木工学教室 正会員 池 内 正 幸
防衛大学校 土木工学教室 正会員 重 村 利 幸

1. はじめに

河床波に関する研究は従来精力的に進められて来たが、これらの研究のうち多くのものは発達し、出来上がった河床波の統計的な性質や抵抗との関係を調べるのが目的であったり、あるものは河床波の発生のみに着目して安定不安定解析であったり、これに対して本研究は河床波そのものの基礎方程式を導出することを目的としており、得られた方程式に基づき、河床波の発生、発達と平衡状態を議論するものがある。

2. 理論的考察

(a) 基礎式と基本的な関係式 本研究で用いる基本式といくつかの関係式は著者が文献(1)で用いたものと同様である。図1は以後用いる記号の定義を示している。図中の $\bar{U}$ は流水の平均流速、 q は局所的な河床波の波高、 u_0 は河床上の流速、 q_0 は(空率率の効果も考慮した)流砂量である。式(1)は流砂量の連続式、(2)の q_0 は流砂量が局所的な関数であるとして δ と α 値、 δ はいわゆる波の距離である。

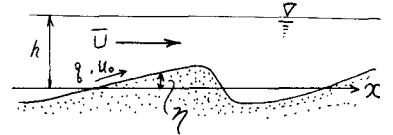


図1 流れの模式図と記号の定義

$q_0(x)$ の表現としては材により導入された文献(2)のinclination factor α を含む(4)式を用いる。ここには C 、 m は係数であり、平均流砂量 $\bar{q}_0$ を $C\bar{U}^m$ とする。ここで河床波が存在するにによる河床近傍の流速を(5)式で表現すると、 u_0^m は近似的に(6)式で表現でき、ここには u_0 が河床波の存在により変化した流速成分である。(6)を(4)に代入すると $q_0(x)$ として(7)を得る。(i) δ の1次までの解析: (3)式で δ の1次までを考慮したときの流砂量 $q(x) = q_0(x) - \delta \frac{\partial q_0}{\partial x}$ となり、粘弾性モデルのフーリエモデルを採用したことに従って(7)を(3)式に代入する。このとき(7)式右辺の下線項は微小項より以後の解析では無視する。(7)式中の u_0^m としては(8)式に示すように河床波の波高 q と関係づける。 u_0' と q との間に線型な関係と仮定したことは河床波として微小振幅波を考えていることに相当する。(8)式中の $f(x, q, \tau)$ は開水路流れにおいて自由水面に発生する定在波からの寄与を表わしている(文献(1))。若干の計算の後、微小振幅河床波の発生、発達を支配する基本式(5a)次を得る。(9)式の左辺第2項は初流項であり、移動速度は $m\beta \bar{q}_0 / \bar{U}$ である。上記の式展開より、移動速度は一定値であり分散関係(移動速度に及ぼす)は存在しない。これは本解析では河床波を微小振幅長波として扱っていることに相当する。第3項は拡散項であるが拡散係数が相当する $-(\alpha \bar{q}_0 - m\beta \delta \bar{q}_0 / \bar{U})$ は正の値も負の値もとり得る。拡散係数が負の値を取ったときは河床波の発生には $f=0$ の語であり、 $f \neq 0$ の場合には拡散係数が正の値をとる場合でも f が強制外力として働き、河床波は

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q_0}{\partial x} = 0 \quad (1), \quad q(x) = q_0(x - \delta) \quad (2)$$

$$q_0(x - \delta) = q_0(x) - \delta \frac{\partial q_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\partial^2 q_0}{\partial x^2} \quad (3)$$

$$q_0(x) = C u_0^m \left(1 + \alpha \frac{\partial q}{\partial x} \right) \quad (4)$$

$$u_0 = \bar{U} + u_0' \quad (5), \quad u_0^m = \bar{U}^m + m \bar{U}^{m-1} u_0' \quad (6)$$

$$q_0(x) = C \left\{ \bar{U}^m + m \bar{U}^{m-1} u_0' \right\} \left\{ 1 + \alpha \frac{\partial q}{\partial x} \right\} \\ = \bar{q}_0 \left(1 + \alpha \frac{\partial q}{\partial x} \right) + m \frac{\bar{q}_0}{\bar{U}} \left(1 + \alpha \frac{\partial q}{\partial x} \right) u_0' \quad (7)$$

$$u_0' = \beta q + f(x, q, \tau) \quad (8)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + m\beta \frac{\bar{q}_0}{\bar{U}} \frac{\partial q}{\partial x} + (\alpha \bar{q}_0 - m\beta \delta \frac{\bar{q}_0}{\bar{U}}) \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \delta \alpha \bar{q}_0 \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} = -m \frac{\bar{q}_0}{\bar{U}} \frac{\partial f}{\partial x} \quad (9)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + m\beta \frac{\bar{q}_0}{\bar{U}} \frac{\partial q}{\partial x} + (\alpha \bar{q}_0 - m\beta \delta \frac{\bar{q}_0}{\bar{U}}) \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \\ + \left(\frac{1}{2} \delta^2 m\beta \frac{\bar{q}_0}{\bar{U}} - \alpha \delta \bar{q}_0 \right) \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} \\ + \frac{1}{2} \delta^2 \alpha \bar{q}_0 \frac{\partial^4 q}{\partial x^4} = -m \frac{\bar{q}_0}{\bar{U}} \frac{\partial f}{\partial x} \\ + m \delta \frac{\bar{q}_0}{\bar{U}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \delta^2 m \frac{\bar{q}_0}{\bar{U}} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad (10)$$

$$q_t + \alpha q_x + \alpha q_{xx} + \beta q_{xxx} + f_{xxxx} = g(x) \quad (11)$$

発生する。しかし線型長波の基本式と異なり、このため初期条件としてあらゆる波長の擾乱を与えても全て発達するとは異なる。

これは次に示す解析で明らかになるように(3)式の δ として一次までしか考慮してはいけなから、(ii) δ の2次までの解析。

(3)式で δ の2次までを考慮しては(9)式の代りに(10)式が得られる。(10)式中の種々の係数を新たに $\alpha, \alpha_0, \beta, \gamma_0$ とすると(11)式の様に簡単に表現できる。 $\gamma_0 = \frac{1}{2} \delta^2 \alpha \bar{\gamma}_0 > 0$ より(10)

あるいは(11)式中左辺5項の4階微分の項は散逸過程を表わしている。結局 δ の1次まで考慮して(9)式では全2の波長をも成分は成長しはつたのであるのに対して δ の2次まで考慮して(10)式では左辺5項が成長を抑える働きをしてい

ることに注意。次に成長率が最大にする波数を求めた。まず移動速度 $U (= m \beta \bar{\gamma}_0 / \bar{U})$ を軸系からみて、 η が(2)式の様に書けることを仮定し(11)式に代入すると(13)式が得られる。さらにこの尖部を微分すると(14)式が得られ、結局成長率最大を示す波数 k_{max} は(15)式で与えられること

がわかる。(iii) 非線型長波として α 河床波。上述の解析では現動を受けた底曲流速成分は河床波高の1次に比例する(18)式)としていたが、近似度をもう一ランク上げて(18)式の δ に表現してみよう。強いと言うならば非線型長波として取り扱ってはいけなから、(10)式に相当する式として(19)式、(20)式を無次元量を用いて(21)式が得られる。

(21)式の意味あることは河床波は平均的には無次元速度 m で移動しつつ波高の大きいところをより速く進むために波形状次第に前傾化していくことである。次に拡散係数が γ の関数とすると、成長して河床波は拡散係数を0とすると成長が止むことになる。試みに m, α, δ 等に適當な値を代入し、拡散係数=0とする最大波高 $2\gamma_{max}$ を求めた。 $\alpha = 1, m = 4, \delta/h = 0.2$ を代入すると、

$2\gamma_{max} = 2\gamma_{max}/h = 0.266$ となり、一般に実験的に知ら

れている0.25の値と極めて近い値を得た。(b) 基礎方程式の解の特性。前述の基本式(11)式の解は数値的に検討したとおりいくつか非常に興味ある結果が得られている。それは適當な初期値から出発するとまず(15)式で表わされる卓越波が急速に成長を始め、これを初期値に与えた k_{max} の波長は正確に保ちつ、成長を続け、ある波高に達した時急に成長は止む。以後空間的に周期性を保ち、 k_{max} の波数をほぼ正確に保ちつても成長するが、全体としては不規則な形状であり、以後このような状態(カオス)が続く場合がある。通りがあるようである。どちらのケースも河床波としては考えられ得るものあり、今後数値計算と実験とを通して詰めて行く必要を考えている。

参考文献 (1) 山田正, 池内正幸, 堀江良徳: 第28回水理講演会論文集, pp.149~155, 1984.
(2) Hayashi, T., Proc. ASCE, vol. 96, no. HY2, pp.431-439, 1970.
(3) Kawahara, T., Physical Review Letters, vol. 51, no. 5, pp. 381~383, 1983.

$$\eta \propto e^{(ikx + \omega t)} \quad (12)$$

$$\sigma = \alpha k^2 - \gamma_0 k^4 + i \beta k^3 \quad (13)$$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{d\sigma}{dk} \right) = 2k\alpha_0 - 4k^3\gamma_0 = 0 \quad (14)$$

$$k_{max} = \sqrt{\alpha_0 / 2\gamma_0} \quad (15)$$

$$\alpha_0 = \left\{ \alpha - m \left(\beta \frac{h}{U} \right) \left(\frac{\delta}{h} \right) \right\} \bar{\gamma}_0 \quad (16)$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} \delta^2 \alpha \bar{\gamma}_0 \quad (17)$$

$$u_0 = \bar{U} \frac{h}{k - \eta} + \bar{U} f(x, \eta) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + m \frac{\bar{\gamma}_0}{h} \left(1 + 2 \frac{\eta}{h} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\bar{\gamma}_0}{h} \left(\alpha - m \frac{\delta}{h} \left(1 + 2 \frac{\eta}{h} \right) \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ + \left(\frac{1}{2} \delta^2 m \left(1 + 2 \frac{\eta}{h} \right) \frac{\bar{\gamma}_0}{h} - \alpha \delta \bar{\gamma}_0 \right) \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \\ + \frac{1}{2} \delta^2 \alpha \bar{\gamma}_0 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = F(x) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\eta = \eta/h, \quad \xi = x/h, \quad \tau = t \cdot \bar{\gamma}_0 / h^2 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + m(1 + 2\eta) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \left(\alpha - m \frac{\delta}{h} (1 + 2\eta) \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \\ + \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{h} \right)^2 m (1 + 2\eta) - \alpha \left(\frac{\delta}{h} \right) \right\} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} \\ + \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\delta}{h} \right)^2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} = G(\xi) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\alpha - m \frac{\delta}{h} (1 + 2\eta) = 0 \quad (22)$$

$$2\gamma_{max} = \frac{2\gamma_{max}}{h} = \left(\frac{\alpha}{m} \frac{h}{\delta} - 1 \right) \quad (23)$$