

建設技術研究所 正 員 ○田中英明
 神戸大学工学部 学生員 福井芳樹
 神戸大学工学部 正 員 篁 順亮

1. まえがき 本研究は流速及び密度が連続する自由境界層流れを近似する2つのモデルに対して、弱非線形理論を適用し、次式で示される振幅方程式を導入することによって超臨界安定問題を考える。

$$dA/dt = aA - bA^2 A^* \quad (1)$$

2. モデル 対象とする流体を非粘性、非圧縮で Boussinesq 近似が成立するものと仮定し、流れは2次元とする。本研究で用いる Model 1 を (2) 式、Model 2 を (3) 式に示す。

$$\bar{u}(y) = \lambda(y) = \tanh y \quad (2)$$

$$\bar{u}(y) = \lambda(y) = \begin{cases} y - \frac{4}{27}y^3 & -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2} \\ \pm 1 & y \gtrless \frac{3}{2} \end{cases} \quad (3)$$

ただし、(2)、(3) 式はともに無次元表示であり、は密度分布 $\rho(y)$ に対して $\lambda = \log[\rho(0)/\rho(y)]$ で定義される関数、 $\bar{u}$ は流れ方向の平均流速である。

3. 振幅方程式の導入 Euler 式の諸量を主流成分と擾乱成分とに分け圧力項を消去し、さらに流れ関数の擾乱成分を導入すれば、結局流れ関数の擾乱成分 $\hat{\psi}$ に関する非線形運動方程式が得られる。本研究では3次の非線形項まで考慮する。非圧縮の条件式は上と同様の操作を行い、線形化した式を用いる。

本研究は超臨界安定問題を弱非線形理論で考える為、対象となるのは線形理論で求められた安定限界近傍の不安定領域である。従って、 $|J - J_c| = \epsilon^2$ で定義される ϵ は微小と仮定する。ただし、 J は Richardson 数である。それ故、擾乱成分が ϵ の級数展開として次の様に表わされるものと仮定する。

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= \epsilon \{ \phi_1 \exp(i\alpha x) + \phi_1^* \exp(-i\alpha x) \} + \epsilon^2 \{ \phi_2 \exp(2i\alpha x) + \phi_2^* \exp(-2i\alpha x) \} + \epsilon^3 \{ \phi_{31} \exp(i\alpha x) + \phi_{31}^* \exp(-i\alpha x) \} \\ \hat{\rho} &= \epsilon \{ \rho_1 \exp(i\alpha x) + \rho_1^* \exp(-i\alpha x) \} + \epsilon^2 \{ \rho_2 \exp(2i\alpha x) + \rho_2^* \exp(-2i\alpha x) \} + \epsilon^3 \{ \rho_{31} \exp(i\alpha x) + \rho_{31}^* \exp(-i\alpha x) \} \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 $*$ は共役複素数、 α は無次元波数を表わす。(4) 式を上で求めた運動方程式、非圧縮の条件式に代入し、 $\phi_1 = A(t)\phi_1(y)$, $\phi_2 = A^2\phi_2$, $\phi_{31} = A^2A^*\phi_{31}$ と変数分離の形で表わして ϵ に関して整理すると、の各オーダーについて支配方程式を得る。この支配方程式より1次の解(線形解) ϕ_1 、2次の解 ϕ_2 、3次の解 ϕ_{31} が決定される。また、運動方程式で考慮した3次の非線形項は Boussinesq 近似によって消去されることがわかった。さらに(4) 式を運動方程式、非圧縮の条件式に代入し、 $\exp(i\alpha x)$ にかかる係数を0として得られた式の両辺に、Taylor-Goldsteinの線形微分方程式の随伴方程式の同次解をかけて $y = \infty \rightarrow y = -\infty$ で積分すると、(1) 式で示される振幅方程式が得られる。Model 1、Model 2 に対する振幅方程式の係数 a, b を次に示す。ただし、 C_i は波速の虚部である。

$$\begin{aligned} \text{Model 1: } a &= \alpha C_i, \quad b = \epsilon^2 [-3\alpha C_i + i\{-2.43\alpha + 2.131\alpha C_i^2 + 0.980(\alpha/J)\}] \\ \text{Model 2: } a &= \alpha C_i, \quad b = \epsilon^2 [-2.58\alpha C_i + i\{-0.0976\alpha + 6.342\alpha C_i^2 + 2.67(\alpha/J)\}] \end{aligned} \quad (5)$$

4. 理論的結論 (1) 式より振幅 $|A|$ の時間変化について(6) 式が得られ、位相速度 $-(d\theta/dt)$ の時間変化について(7) 式が得られる。

$$|A|^2 = \frac{|A_0|^2}{(br/ar)|A_0|^2 + \{1 - (br/ar)|A_0|^2 \exp(-2art)\}} \quad (6) \quad -\frac{d\theta}{dt} = bi|A_0|^2 \exp(2art) \quad (7)$$

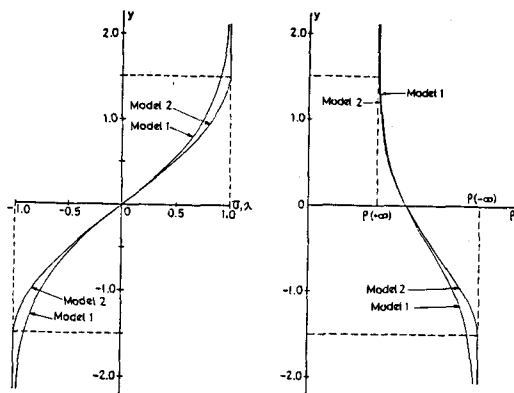


図-1 (a) 流速分布 (b) 密度分布

ただし、 $|A_0|$ は初期振幅を表わし、添字 r , i はそれぞれ実部、虚部を表わす。(3) 式より 2 つのモデルとも $ar>0, br<0, bi>0$ となり、限界Richardson数 $Jc=1/4$ 以下の擾乱はすべて非線形性を考慮することにより増幅し、擾乱の位相速度は時間の経過とともに指数的に増加する。

(1) 式より非線形性を考慮した時の増幅率 αCi が次式の様に得られる。

$$\alpha Ci = ar - br|A|^2 \quad (8)$$

ただし、 $|A|^2$ は (6) 式で示される通りである。これより増幅率は初期振幅 $|A_0|$ と時間 t の関数であることが認められる。図-2 に増幅率の時間変化を示す。非線形性を考慮した時の擾乱の波形を図-3 に示す。2 つのモデルとも峰の部分がり、谷の部分がないとなる。さらに Model 2 は谷の部分に低い峰が存在する。これは非線形項の影響ではなく、流速分布のモデルの違いだけよりこの様な波形の変化が生じたと考えられる。

5・実験 断面が30cm×100cm、有効長300cmの回流式水路を用いて実験を行った。静止した下部塩水層の測定部上流に助走平板を設け、この上から淡水を流入させる二層流において、界面に発生する内部波を可視化測定した。上層と下層を区別する為、メチレンブルーにより着色した。取水口は水路測定部下流に設け、上層の淡水だけを取水する様にした。流速分布はポリスチロール粒子（密度1.04）をストロボ2灯時差発光による可視化で求めた。上層の密度 ρ_1 、下層の密度 ρ_2 、平均流速 V 、自由境界層厚 $2h$ によるRichardson数 $J=(gh/V^2) \cdot (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_2 + \rho_1)$ を実験結果整理に用いている。

実験から求めた波高を理論と比較すると、図-4 (a) の様にはほぼ一致する。この場合の増幅率の実測値と理論値の対応を図-4 (b) に示す。しかし、実測値のなかには図-5 の様に波高が減衰するものが見られた。これは砕波の為に混合が生じたものであり、波の峰の部分の削られ、波高が減少したものである。この現象は密度差の小さい流れにおいて比較的多かった。

波高と波速の関係を図-6 に示す。ただし、図中の理論曲線は $C=(bi/\alpha)|A|^2+V$ である。これより当然のことであるが、線形理論より非線形理論に実験結果が対応していることがわかる。

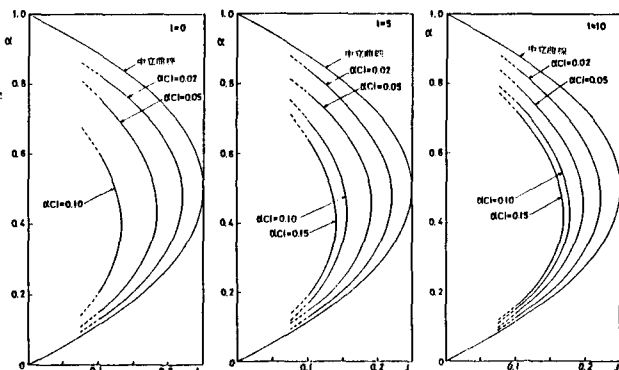


図-2 増幅率の時間変化。 $|A_0|=1, t=0, 5, 10$ (sec) に対する等増幅率線を示した。

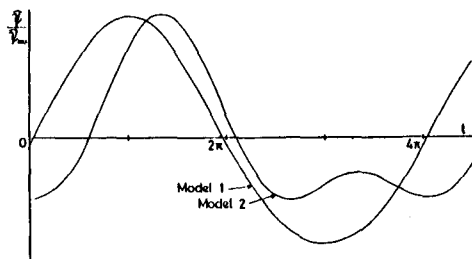


図-3 モデル 1, モデル 2 の擾乱の波形。 $J=0.20, t=20$ (sec) に対して無次元化したものを示した。

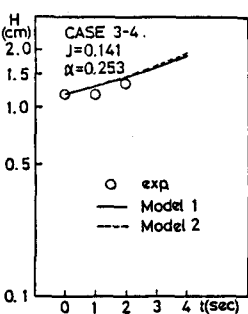


図-4 (a) 波高の時間変化の実測値と理論値の比較

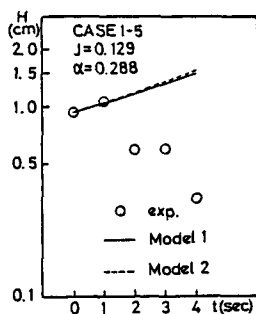


図-5 波高の時間変化の実測値と理論値の比較

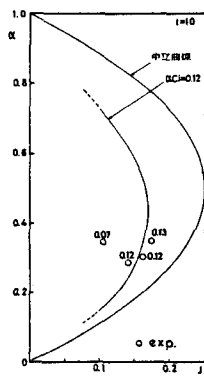


図-4 (b) 増幅率の実測値と理論値の比較

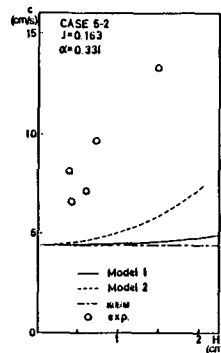


図-6 波高と波速の関係の実測値と理論値の比較