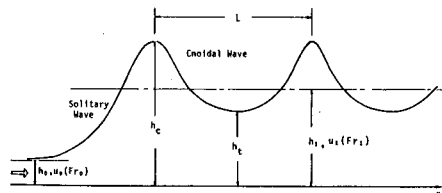


広島大学工学部 正員 細田 尚
京都大学工学部 正員 岩佐 義朗

1. はじめに; 本研究は、鉛直加速度の効果を考慮する必要がある例として波状跳水を取り上げる。波状跳水に関する従来の研究として、孤立波とクノイド波を接続して理想化された波状跳水を考えた Iwasa の研究⁽¹⁾、鉛直加速度だけでなく渦動粘性項を考慮する必要性を示し、基礎式系の定性的特性を明らかにした Whitham の研究⁽²⁾がある。本研究では、これらのモデルの特性を詳細に検討するとともに、数値解析により実際現象への適用を検討する。

2. 基礎式; 基礎式は、鉛直加速度を考慮した一次元運動量方程式⁽³⁾を用いる。ただし、Whitham のモデルに対応して渦動粘性項を含んでいる。座標系と波状跳水の概念図を Fig. 1 に示す。

$$\frac{d}{dx} \left(hu^2 + \frac{gh^2}{2} + \frac{1}{3} h^2 u^2 \frac{dh}{dx} - \frac{1}{3} hu^2 \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right) = \frac{d}{dx} \left(D_m h \frac{du}{dx} \right) + hg \sin \theta - \frac{\tau_b}{\rho} \quad (1)$$



(1)式の右边が無視されるとき、クノイド波とよばれる周期解とその極限としての孤立波が存在する⁽⁴⁾。Whitham は、波状跳水、段波において、局所的に水理量の変化が激しい部分では $hg \sin \theta - \frac{\tau_b}{\rho}$ の項が他の項に比べて小さいとした次式と類似の基礎式を考えた。 q は単位幅流量。

$$\frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} + \frac{1}{3} q^2 \frac{dh}{dx} - \frac{1}{3} \frac{q^2}{h} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 - D_m h \frac{d}{dx} \left(\frac{q}{h} \right) = M_0 (= \text{const.}) \quad (2)$$

M_0 は波が十分減衰した領域での水深 h により、 $M_0 = \frac{q^2}{h_1} + \frac{gh_1^2}{2}$ と表わせる。

3. Iwasa のモデル⁽¹⁾; Iwasa は波状跳水を孤立波とクノイド波の接続として表わした。(Fig. 1 参照) 接続条件として h_0 と h_1 が共役水深の関係にあること、すなわち次式が仮定されている。

$$\frac{h_1}{h_0} = \frac{\sqrt{1+8F_0^2} - 1}{2} \quad (3) \quad \text{このモデルの特性量は次のように表わされる。記号の説明は Fig. 1 に示した通りである。}$$

$$\frac{h_c}{h_0} = F_0^2, \quad \frac{h_t}{h_0} = 2 \frac{F_1(\pi/2, k) - E_1(\pi/2, k)}{F_1(\pi/2, k) \{ \sqrt{1+8F_0^2} - 1 \} - 2F_0^2 E_1(\pi/2, k)}, \quad \frac{L}{h_0} = \frac{4F_1(\pi/2, k)}{\sqrt{3(1 - \frac{h_0}{F_0^2 h_t})}} \quad (4)$$

ここに、 $k^2 = (F_0^2 - h_t/h_0) / (F_0^2 - h_0/h_t)$, F_1, E_1 ; 第一種、第二種の完全楕円積分。

4. Whitham のモデル⁽²⁾; Whitham は(2)式と同様の基礎式の特性を検討した。

(2)式は連立常微分方程式系で

$$\frac{dh}{dx} = p, \quad \frac{q^2}{3} \frac{dp}{dx} = \frac{1}{3} \frac{q^2}{h} p^2 + \frac{D_m q}{h} p + \left(M_0 - \frac{q^2}{h} - \frac{gh^2}{2} \right) \quad (5)$$

と表わせる。この基礎式系の特異点は、 $p=0$, $\frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} = M_0$ であり、共役水深の関係にあり、Iwasa のモデルの接続条件が自動的に組み込まれていることになる。また、この特異点は

$$\frac{D_m}{q} = \sqrt{\frac{4}{3} \left(\frac{1}{F_1^2} - 1 \right)} \quad (F_1 = \frac{q}{\sqrt{gh^3}})$$

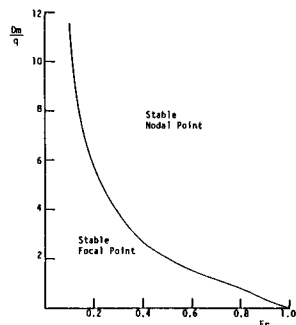


Fig. 2 特異点の分類

により安定結節点と安定渦状点に分類されることが指摘され、安定渦状点の領域が波状跳水に対応している。領域

域区分をFig. 2に示した。安定結節点の領域は D_m/q の値が非常に大きいことから、水理学的に意味のない領域と考えられている。渦動粘性係数 D_m は、流れ方向の乱流拡散係数がほぼ1.0 h_u 程度であることから、 D_m も h_u 程度と考えられる。 $\tau_b = f \rho u^2$ (f : 摩擦係数) とおくと、 $D_m/q \approx \sqrt{f}$ 程度となり、 f が0.01のオーダーであることから D_m/q は0.1程度の値と考えられる。解の特性を $Fr_1 = 0.7$, $D_m/q = 0.05$ のばあいについてFig. 3に示した。ただし、 p の初期値として ± 0.001 の2通りを示したが、跳水の発生位置が異なるだけで、その他の特性量は同一となっている。Fig. 2には参考のため、(2)式で静水圧分布の仮定を行ったばあいの基礎式

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{1}{D_m q} \left(q^2 + \frac{g h^3}{2} - M_0 h \right) \quad (6)$$

の結果も示した。共役水深の間で急激な水深変化がみられる。

5. 両モデルの特性量の比較; Fig. 4 (a), (b), (c)に両モデルの特性量 h_c/h_0 , h_t/h_0 , L/h_0 と Fr_0 の関係を示した。両者はほぼ同一の値となり、とくに波長に及ぼす D_m/q の影響は小さいと考えられる。

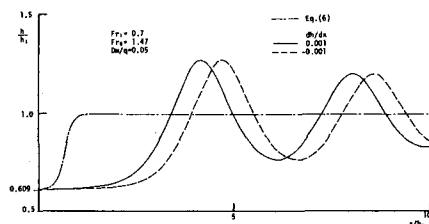


Fig. 3 波状跳水の計算例

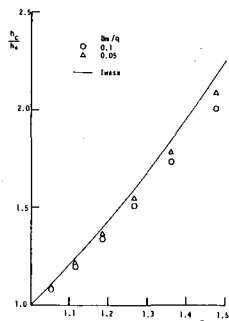
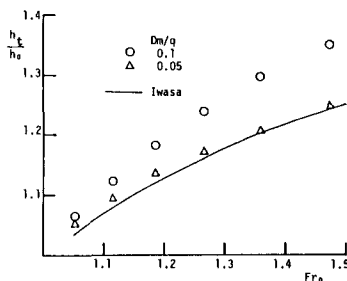
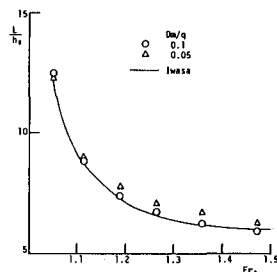


Fig. 4(a) h_c/h_0 と Fr_0 の関係



(b) h_t/h_0 と Fr_0 の関係



(c) L/h_0 と Fr_0 の関係

6. 水面形解析との関係; 次に波状跳水の実験結果との比較を行う。(1)式において、鉛直加速度を考慮することにより生ずる付加項、渦動粘性項は高階微分であることから、水理量の局所的変化が大きくなるとき卓越すると考えられ、水深変化の小さい領域では従来の水面形解析と接続していなければならない。水面形全体を考えると、波状跳水部のみならず、せき上げ背水、低下背水の領域も含んだ解析が行われなければならない。3節~5節で述べたことは、上流・下流無限大の水深が明確に定義できる波状緩波の結果によって検討できるが、これは講演時に述べるとして、本節では(1)式を用いた水面形解析を行い実験値と比較する。実験条件は路床こう配1/400、波の減衰した等流とみなせる領域での水深 $h_0 = 1.92$ cm、平均流速 $u = 30.15$ cm/secである。得られた水面形をFig. 5に示す。(1)式を連立常微分方程式系に変換して数値解析を行った。ただし、 $\tau_b = f \rho u^2$ とし、 f を等流状態の水理量より0.00578、また $D_m/q = 0.05$ とした。

数値解析の初期条件として、水深のみならず、水深の一階、二階微分まで与えねばならないが、ここでは $dh/dx^2 = 0$ とし dh/dx をパラメータとして変化させた。 dh/dx の値を推定するために、計算開始点での水深を水面形方程式に代入すると $h_0 = 1.11$ cmで $dh/dx = 0.00689$ となり、実験値と適合するようにこの値の近くで dh/dx を変化させた。 $dh/dx = 0.00694$ のとき波状跳水部はかなり再現できているが低下背水の出現が早い。 $dh/dx = 0.007$ のときはその逆となる。参考のため M_2 , M_3 曲線を示した。[参考文献] (1) Inasa, Y.; Proc. 5th Japan National Congr. App. Mech., 1955 (2) Whitham, G. B.; Linear and Nonlinear Waves, 1974 (3) Inasa, Y.; Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ., Vol. 17, No. 4, 1955

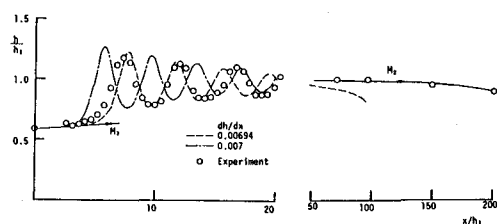


Fig. 5 水面形解析

入すると $h_0 = 1.11$ cmで $dh/dx = 0.00689$ となり、実験値と適合するようにこの値の近くで dh/dx を変化させた。 $dh/dx = 0.00694$ のとき波状跳水部はかなり再現できているが低下背水の出現が早い。 $dh/dx = 0.007$ のときはその逆となる。参考のため M_2 , M_3 曲線を示した。[参考文献] (1) Inasa, Y.; Proc. 5th Japan National Congr. App. Mech., 1955 (2) Whitham, G. B.; Linear and Nonlinear Waves, 1974 (3) Inasa, Y.; Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ., Vol. 17, No. 4, 1955