II-162　自由蛇行流のエネルギー的考察

日本大学工学部　正員　木村喜代治
日本大学工学部　正員　高橋迪夫
日本大学工学部　正員　長林久夫

河川蛇行に関する理論的および実験的研究は種々行なわれている[1]。自然河川の蛇行は主流および二次流による河床，河岸の洗堀と土砂の堆積ならびに河床形態などに関連して発生し発達するものであり，河床物質の移動が大きな要因であることは論をまたない。しかし考えてみるに水流にはそれ自身，その流れにかなった蛇行をする性質があるとみられる。河床物質の移動を伴なわない流れにおいても蛇行することがあり，著者らの行なった硬質塩化ビニール平板上の斜面に少量の水を流した実験において，その細い水流が蛇行することのあることが認められた[2]。端的に言えば，流れはその持っているエネルギーや周囲の状態に対し，最も流れ易いように流れるものであろう。直線から曲率半径一定の水路に流入する流れでは強い二次流の発生によって，主流の流速分布が変化し，いわゆる発生域より発達域をへて完全発達域となることはよく知られている。この完全発達域の流れはその水路の曲率にかなった流れであると考える。完全発達域までの遷移領域においては水流自身から考えたとき，その水路曲線形にかなった流れではない。

本報ではほぼ安定した自由蛇行流を取扱い，その流れとして各断面においてその主流の流速分布と曲率とは調和のとれた流れであるとして考察した。すなわち直線や蛇行流の変曲点など曲率ゼロの水路の流れにはそれにかなった流速分布があり，また曲線部の流れにはそれにかなった流速分布があると考える。自由蛇行においては何らかの原因による流速分布の偏りがあればそれに対応した流路の曲がりが存在すると考える。本報ではこの曲がりによる流速分布の影響分は，その曲率に対応した強制渦形の流速分布形をとるとした。また理論的取扱いにおいて二次流の影響は主流流速分布の偏りとしてのみ取扱った。安定した自由蛇行流のエネルギー関係，変曲点付近を中心とした力学的関係および単純化した場合の蛇行平面形状などについて論じた。

考察に当たって，流れの各断面の図心を連ねた曲線を蛇行中心線とし，この曲線は一様で滑らかな安定した周期連続曲線と考える（曲率は曲線に沿って一様に増減する）。

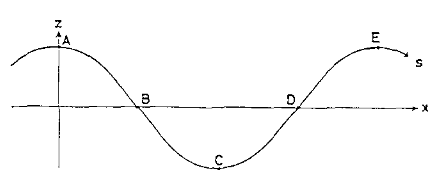

Fig. 1

当然，変曲点では $1/r=0$，凸曲線部では $1/r<0$，凹曲線部では $1/r>0$ である。r：蛇行中心線の曲率半径。また水路幅は曲率半径に比べて小さいものとする。

蛇行流を平面的に見て，ある断面でその中心線の曲率中心を中心とした回転運動と考えたとき，dt 時間にこの断面を流れる流体の回転運動エネルギーを計算すると

$$E=\rho\,dt\int_A \frac{u r'^2 \omega'^2}{2}\,dA=\rho\,dt\int_A \frac{u^3}{2}\,dA \qquad (1)$$

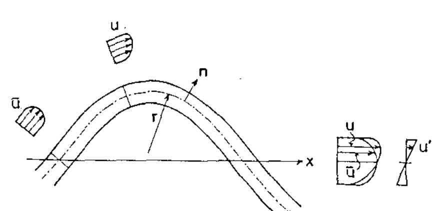

Fig. 2

ここで u：主流流速で水深方向一様とする，r'：任意点の曲率半径，$\omega'=u/r'$：任意点の角速度，ρ：密度，A：断面積。ある断面で，もし断面形がそのままで水路が直線であったとしたときの流速を $\bar{u}$ とし，曲線流としての影響流速を u' とすると，$u=\bar{u}+u'$ となる。よって

$$E=\rho\,dt\int_A \frac{(\bar{u}+u')^3}{2}\,dA=\rho\,dt\int_A \frac{(\bar{u}^3+3\bar{u}^2u'+3\bar{u}u'^2+u'^3)}{2}\,dA \qquad (2)$$

ここで，もし $\int_A \bar{u}^2 u' \, dA \doteqdot 0$ および $\int_A u'^3 dA \doteqdot 0$ と置けるなら

$$E = \rho\, dt \left\{ \frac{1}{2}\int_A \bar{u}^3 dA + \frac{3}{2}\int_A \bar{u}\, u'^2 dA \right\} = \rho\, Q\, dt \left\{ \alpha \frac{v^2}{2} + \frac{3}{2}\frac{1}{A}\int_A \left(\frac{\bar{u}}{v}\right) u'^2 dA \right\} \qquad (3)$$

v；断面平均流速，α；エネルギー補正係数。蛇行流の流束が平均流速 v で曲率半径 r の回転をするものとするとき，角速度を ω とし，曲線の法線方向を n とすると $\omega = v/r = u'/n$ である。これより式(3)は

$$E = \frac{w}{g} Q\, dt \left\{ \alpha \frac{v^2}{2} + \frac{3}{2}\frac{I\omega^2}{A} \right\} \qquad (4),\qquad ただし\quad I = \int_A \left(\frac{\bar{u}}{v}\right) n^2 dA \qquad (5)$$

式(4)右辺第1項は並進運動エネルギー，第2項は図心を通る鉛直軸に対する回転運動エネルギーである。よって $wQ\,dt$ で除し，これにピエゾ水頭 H，全水頭 T とすると $\dfrac{\alpha v^2}{2g} + \dfrac{3}{2}\dfrac{I\omega^2}{Ag} + H = T$ (6)

曲線長を s とすると dt 時間の曲線長に沿った平均移動距離 $ds = v\,dt$ である。問題を単純化して考えるため各断面の v を一定とすると，$\omega = v \cdot \dfrac{1}{r}$，$\dfrac{d\omega}{dt} = v^2 \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{r}\right)$。

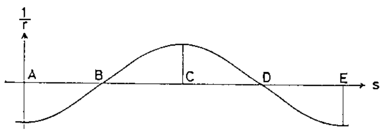

Fig. 3

Fig.1 を参照して Fig.3,4 が描ける。$\omega \propto 1/r$ であるから Fig.3 は $\omega \sim s$ の関係に相似する。Fig.4 から明らかなように $d/ds \cdot (1/r)$ はその絶対値が変曲点 B，D などで最大であり，A，C などでゼロとなる。また A～C 間は正，C～E 間は負となる。回転運動エネルギーの dt 時間内の増加はこの間になされたトルクの仕事量に等しい。任意断面を単位時間流れた流体の回転運動エネルギー R は $R = \dfrac{3wQI\omega^2}{2gA} = K\omega^2$

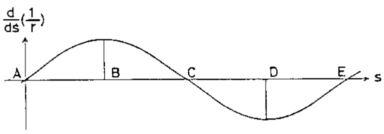

Fig. 4

I をほぼ一定と仮定すると $dR/dt = 2K\omega \cdot d\omega/dt$。一方，トルクのなす仕事量 W，トルク M とすると

$$\frac{dW}{dt} = M\omega \quad よって \quad M = 2K\frac{d\omega}{dt} = \frac{3wQI}{gA}\frac{d\omega}{dt} = \frac{3wQv^2 I}{gA}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (7)$$

となって M は $d/ds \cdot (1/r)$ に比例する。すなわち $M \sim s$ 曲線は Fig.4 とほぼ同様になる。これより蛇行平面曲線の変曲点 B，D などにおいては，その前後が同じ方向のトルクが作用し，しかも変曲点で最大のトルクとなっている。

さて，本報による考えに従がって合理的な蛇行中心線の平面曲線形状を決定することを考えてみよう。問題を極めて単純化し，曲線上の各点での平均流速，断面形を一定とする。このとき，ある2点を結ぶ蛇行曲線を考え，この曲線長を一定としたときに，その曲線に沿った運動エネルギーの総和を計算する。種々の曲線のうちでこの総和が最小の曲線を求めてみる。すなわち変分学の等周問題として取扱う。式(4)を参照して

$$\int_S \frac{1}{r^2} ds = min \qquad (8)$$

が条件となる。これに前出の制限のもとに，Eulerの微分方程式などを用いて曲線が決定される。この曲線は Euler の導いた"Elastica の曲線"であり，Langbein と Leopold[3] が河川蛇行の研究に用いた sine generated curve のもとになる von Schelling の確率統計論より導いた曲線と全く相似である。

1) 林泰造；蛇行論，水工学シリーズB，1970。池田駿介ほか；河川の自由蛇行に関する理論的研究，土木学会論文集 225号，1978。 2.) 木村喜代治ほか；細い水流の蛇行について，東北支部発表会，昭55年。 3.) Langbein and Leopold；River meanders，USGS Prof Paper 422H，1966.