II-130　順傾斜水路における跳水の一般式の提案

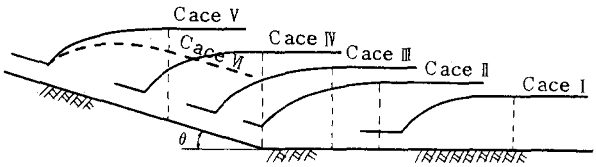
日本大学工学部　正　員　安　田　禎　輔

まえがき　順傾斜水路における跳水の対応水深に関する式には，Kindsvaterの理論やVen Te Chowの式がある。しかし，これらの式はいずれも特殊な現象に関するもので，一般的な現象に関するものではない。

Kindsvaterの理論は，跳水が傾斜部と水平床の境界で終了している現象に対するものであり，しかも，この式の誘導過程には，射流部の静水圧の項と跳水区間の水路床の水圧の取り方に誤りがある。また，Chow の理論は常流水深が河床と平行となる特殊な場合（等流）に対するものである。本報においては，順傾斜水路において最も一般的な現象と考えられる跳水について式を誘導し，各場合の式と比較し，併せて修正Kindsvater の式も示した。特に，本式は全ての場合の式を包含し条件さえ代入すれば全ての場合の式が得られることを付言しておく。

1．傾斜水路の跳水パターン

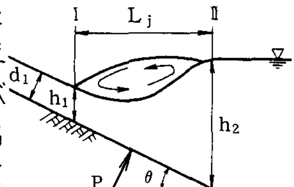
傾斜水路における跳水現象には，おおむね図－1に示すような6つのCaseが考えられる。Case Ⅰは，傾斜角 θ が0の特殊な場合で，水平水路における跳水である。Case Ⅱは，水平水路上の跳水であるけれども，射流部の入射角が0でなく完全な意味での水平水路上の跳水ではない。Case Ⅲは，傾斜部から水平水路にかけて生じる跳水で，Kindsvaterは，本Case はCase Ⅰ とCase Ⅳとの中間的な現象であるから，両Caseから案分比例によって求めることを提唱している。Case Ⅳは，跳水が傾斜部と水平床の境界で終了している場合で，Kindsvater がこの現象に対する式を提案しているが，理論に若干誤りがある。Case Ⅴは，傾斜水路において最も一般的な現象と考えられる跳水である。Case Ⅵは，常流部が等流となる特殊な場合の現象で，傾斜角が非常に小さい場合以外はほとんど起りえないと思われるが，このCaseに関してはChow の式がある。



図－1

2．修正Kindsvaterの式

跳水におけるKindsvater の式の誘導過程には，射流部の静水圧の項（$P_1=wh_1^2/2$）と跳水区間の水路床の水圧の項（$P=W\cos\theta$）とに誤りがある。これらの項を修正（$P_1=wd_1^2/2$，Pは(1)式）して誘導しなおせば以下のようになる。



図－2　Case Ⅳ

水路床に垂直な方向の運動量の式は次式となる。

$$W\cos\theta-P-\frac{1}{2}w(d_1^2-h_2^2)\sin\theta=\frac{wq^2}{g}\left(-\frac{\sin\theta}{h_2}\right)$$

$$\therefore P=W\cos\theta-\frac{1}{2}w(d_1^2-h_2^2)\sin\theta+wF_1^2\sin\theta\frac{d_1^3}{h_2}\quad\cdots(1)$$

W：断面Ⅰ－Ⅱ区間の単位幅当りの水の重量

F_1：断面Ⅰにおけるフルード数，$F_1=v_1/\sqrt{gd_1}$

水平方向の運動量の式は次式となる。

$$\frac{1}{2}w(d_1^2-h_2^2)+P\sin\theta=\frac{wq^2}{g}\left(\frac{1}{h_2}-\frac{\cos\theta}{d_1}\right)\quad\cdots\cdots(2)$$

(1)，(2)式より

$$\left\{\left(\frac{h_2}{d_1}\right)^2+\frac{h_2}{d_1}\right\}\left\{\cos^2\theta-\frac{2W\sin\theta\cos\theta}{w(h_2^2-d_1^2)}\right\}=2F_1^2\frac{h_2\cos\theta-d_1(1-\sin^2\theta)}{h_2-d_1}$$

ここで，Kindsvaterの表現$W=wK'(h_2^2-h_1^2)/\cos^2\theta$を代入して整理すると

$$G'^2=F_1^2\cos\theta\frac{h_2-d_1\cos\theta}{h_2-d_1}\Big/\left\{\cos^2\theta-2K'\tan\theta\frac{h_2^2-h_1^2}{h_2^2-d_1^2}\right\}\cdots(3)$$

$$\therefore\frac{h_2}{d_1}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{8G'^2+1}-1\right)\quad\cdots\cdots(4)$$

これらの式は，流れ方向の運動量の式から求めると簡単に求められ，また，底面摩擦を考慮した式も求められる。

3．傾斜水路における跳水

図－3に示す跳水は，流入方向と流出方向が異なる。検査面（断面Ⅰ－Ⅱ区間）内の流体に作用する外力を図－(b)に示す。斜面方向の運動量の式は次式となる。

$$\frac{1}{2}w\cos\theta(d_1^2-k_\theta^2d_2^2)+W\sin\theta-\tau_0L_s=\frac{wq^2}{g}\left(\frac{\cos^2\Delta\theta}{d_2}-\frac{1}{d_1}\right)\quad\cdots\cdots(5)$$

ただし，

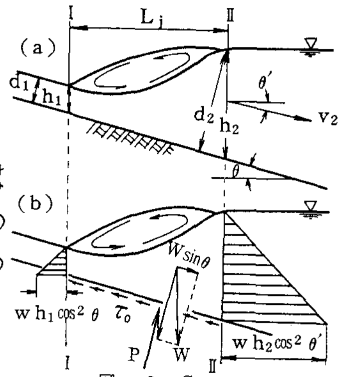
$\Delta\theta = \theta - \theta'$

$k_\theta = \cos\theta' / \cos\theta$

$L_s = L_j / \cos\theta$

であり，また(5)式は水平および鉛直方向の運動量の式からも求められる。

ここで，



図−3　Cace V

$$\boxed{G^2 = F_1^2 \left(\frac{d_2 - d_1\cos^2\Delta\theta}{k_\theta d_2 - d_1}\right) \Big/ \left\{\cos\theta - \frac{2(W\sin\theta - \tau_0 L_s)}{w(k_\theta^2 d_2^2 - d_1^2)}\right\}} \quad \cdots(6)$$

と置き，(5)式を整理すると次式となる。

$$k_\theta\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 + \frac{d_2}{d_1} - 2G^2 = 0$$

$$\therefore \boxed{\frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{2k_\theta}\left(\sqrt{8k_\theta G^2 + 1} - 1\right)} \quad \cdots\cdots(7)$$

(7)式は対応水深比の式であり，また $d_2/d_1 = h_2/h_1$ である。

1) 水平床の跳水 ―Case I―

水平床の条件，$\theta = \theta' = 0$ を(6)式に代入すると，$\Delta\theta = 0$，$k_\theta = 1$，$d_1 = h_1$，$d_2 = h_2$，$F_1 = v_1/\sqrt{gh_1}$ であるから

$$G = F_1 / \{1 + 2\tau_0 L_j / w(h_2^2 - h_1^2)\}$$

となり，(7)式は

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{8F_1^2/(1+R) + 1} - 1\right\}$$

$$R = 2\tau_0 L_j / w(h_2^2 - h_1^2)$$

となる。ここで，もし底面摩擦力を無視すれば $R = 0$ となり $\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{8F_1^2 + 1} - 1\right)$

2) 修正Kindsvater型 ―Case IV―

式(6)に，Kindsvater型の条件 $\theta' = 0$，$W = wK'(h_2^2 - h_1^2)/\cos^2\theta$ および $\tau_0 = 0$ の条件を代入すると $\cos\Delta\theta = \cos\theta$，$k_\theta = 1/\cos\theta$ および $d_2 = h_2\cos\theta$ となるから

$$k_\theta G^2 = F_1^2 \cos\theta \frac{h_2 - d_1\cos\theta}{h_2 - d_1} \Big/ \left\{\cos^2\theta - 2K'\tan\theta \frac{h_2^2 - h_1^2}{h_2^2 - d_1^2}\right\}$$

となり，$G'^2 = k_\theta G^2$ と置けば，(7)式は

$$\frac{h_2}{d_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{8G'^2 + 1} - 1\right)$$

となり，修正Kindsvaterの式(3)，(4)と一致する。

3) Ven Te Chowの式 ―Case VI―

式(6)に,Chowの条件 $\theta = \theta'$，$W = wKL_j(d_1 + d_2)/2$ および $\tau_0 = 0$ を代入すると，$\cos\Delta\theta = 1$，$k_\theta = 1$ となるから

$$G = F_1 / \left(\cos\theta - \frac{KL_j\sin\theta}{d_2 - d_1}\right)^{1/2} \quad \cdots\cdots(8)$$

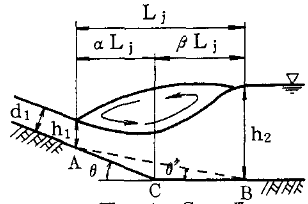
となり，(7)式は

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{8G^2 + 1} - 1\right) \quad \cdots\cdots(9)$$

となり，Ven Te Chow の式と一致する。

4) 境界部における跳水 ―Case III―

CaseIIIは，厳密に式を立てて解くと複雑となり実用性に乏しくなるので，河床ACBを図−3のようにABと単純化して解き，補正係数で補正することにする。



図−4　Cace III

図より $\theta'' = \tan^{-1}(\alpha\tan\theta)$ となり，$\Delta\theta'' = \theta - \theta''$ として，AB方向の運動量の式を立てると

$$\frac{1}{2}w(d_1^2 - h_2^2)\cos\theta'' + W\sin\theta'' - \tau_0' L_j = \frac{wq^2}{g}\left(\frac{\cos\theta''}{h_2} - \frac{\cos\Delta\theta''}{d_1}\right)$$

となり，Kindsvater の条件 $W = wK'(h_2^2 - h_1^2)/\cos^2\theta''$，$\tau_0' = 0$ を考慮して解くと次式となる。

$$\boxed{G'^2 = F_1^2 \cos\theta'' \frac{h_2\cos\Delta\theta'' - d_1\cos\theta''}{h_2 - d_1} \Big/ \left\{\cos^2\theta'' - 2K'\tan\theta'' \frac{h_2^2 - h_1^2}{h_2^2 - d_1^2}\right\}} \quad \cdots(10)$$

$$\boxed{\frac{h_2}{d_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{8G'^2 + 1} - 1\right)} \quad \cdots\cdots(11)$$

ここで，$\alpha = 1$ と置けば $\theta'' = 0$ となり，(10),(11)式は修正Kindsvaterの式(3),(4)式となる。また，$\alpha = 0$ と置けば $\theta'' = 0$ となり，Case IIの場合の式

$$G'^2 = F_1^2 \frac{h_2\cos\theta - d_1}{h_2 - d_1} \quad \text{および} \quad \frac{h_2}{d_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{8G'^2 + 1} - 1\right)$$

となり，また，本式は直接水平方向の運動量の式からも簡単に求めることができる。

まとめ

以上で，全てのCaseの式を示したことになるが，傾斜水路の跳水の一般式として，CaseVの(6),(7)式を提案し，境界部の跳水の一般式としてCaseIIIの(10),(11)式を提案する。(6),(7)式からは，Case I，IV，VIの式が，(10),(11)式からはCase II，IVの各式が求められる。また，跳水区間の水の重量Wとして，ChowまたはKindsvaterの表現を採用したが，より適切な表現法があればさらに合理的な跳水の式が得られる。