

中央大学 学生員 ○桜井 英行

中央大学 学生員 櫻山 和男

中央大学 正 員 川原 睦人

1. はじめに

一般に、波動問題を議論する場合、解析領域の形状から内部波動問題と外部波動問題に分類される。著者らは既に、波動解析のための境界型有限要素法を提案し¹⁾、内部問題に適用することによって、その有効性を示してきた。本報告では、さらに任意水深場における外部波動問題に適用すべく、境界要素との結合解法を提案し、従来の結合解法による解析結果との比較を行ない、本手法の有効性について述べる。

2. 基礎方程式と変分原理

流体は、非圧縮・非粘性、流れは非回転であるとして、2次元の微小振幅波を取り扱う。現象は時間的に調和であると仮定すると、ゆるやかな水深変化を許容する表面波の基礎方程式は、次のマイルドスロープ方程式で表わされる。

$$\nabla \cdot (C g \nabla \eta) + \omega^2 \frac{C}{g} \eta = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

ここで、 η は水位変動量、 C 、 g 、 ω はそれぞれ波速、群速度、角振動数である。また Ω は解析領域を表わす。

水位変動量 η を入射波による変動量 η_{in} と散乱波による変動量 η_{sc} の和であると仮定する。

$$\eta = \eta_{in} + \eta_{sc} \quad (2)$$

入射波については既知であり、次式で与えられる。

$$\eta_{in} = A \exp \{ i k (x \cos \theta + y \sin \theta) \} \quad (3)$$

ここで、 A は入射波の振幅、 θ は入射角である。また、 i 、 k は、それぞれ虚数単位、波数である。

境界条件としては、次のものが導入される。(図-1参照)

$$\eta_n = \partial \eta / \partial n = \hat{\eta}_n \quad \text{on } \Gamma_s \quad (4)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r (\partial \eta_{sc} / \partial r - i k \eta_{sc}) = 0 \quad \text{on } \Gamma_o \quad (5)$$

ここで、 $\hat{\eta}_n$ は既知量を表わし、 r は構造物からの距離を表わす。

また、有限要素領域と境界要素領域の接合境界 Γ_c 上での連続条件式が導入される。

$$\eta_{\Omega_i}^{\Omega_i} = \eta_{\Omega_o}^{\Omega_o}, \quad \eta_{\Omega_i}^{\Omega_i} + \eta_{\Omega_o}^{\Omega_o} = 0 \quad \text{on } \Gamma_c \quad (6)$$

上記の基礎方程式と境界条件式に対して、本手法を適用するにあたり、

変分原理を導入する。その際、考える汎関数は次のようになる。

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \{ C g (\nabla \eta)^2 - \omega^2 \frac{C}{g} \eta^2 \} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_o} C g \eta \hat{\eta}_n d\Gamma - \int_{\Gamma_s} C g \eta \hat{\eta}_n d\Gamma \quad (7)$$

(7) 式の右辺第一項と部分積分し、 $\omega = Ck$ なる関係式を代入すると、次のようになる。

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} C g \eta \hat{\eta}_n d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} C g \eta (\nabla^2 \eta + k^2 \eta) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_o} C g \eta \hat{\eta}_n d\Gamma - \int_{\Gamma_s} C g \eta \hat{\eta}_n d\Gamma \quad (8)$$

ここで、有限要素における η の近似式にヘルホルツ方程式の解を満足するものを用いると、(8) 式の右辺第二項の領域積分はゼロとなり、本手法における汎関数は次のように線積分のみで記述されることになる。

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} C g \eta \hat{\eta}_n d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_o} C g \eta \hat{\eta}_n d\Gamma - \int_{\Gamma_s} C g \eta \hat{\eta}_n d\Gamma \quad (9)$$

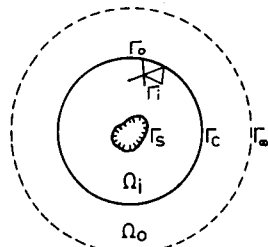


図-1 解析領域

3. 結合解法

内部領域は、境界型有限要素で離散化する。要素としては3節点三角形要素を用い、要素内どこを、次のようなヘルムホルツ方程式の解を満足する式で仮定する。

$$\varphi = \alpha_1 \cos(\frac{k}{2}x) \cdot \cos(\frac{k}{2}y) + \alpha_2 \cos(\frac{k}{2}x) \cdot \sin(\frac{k}{2}y) + \alpha_3 \sin(\frac{k}{2}x) \cdot \cos(\frac{k}{2}y) \quad (10)$$

ここで $\alpha_1 \sim \alpha_3$ は、未定定数、 x, y は要素内の任意の座標値、 k は波数である。

また、外部領域では、基本解として0次第一種のハンケル関数を用い、グリーン関数の公式によって定式化を行う。そして、線形の境界要素によって離散化し、(2)、(6)式を用いて合成波 φ に関する量に変換すると、最終的に次のような方程式を得る。

$$[K + H] = \{F\} \quad (11)$$

ここで K, H は、それぞれ境界型有限要素と境界要素のマトリックスである。また $\{F\}$ は入射波の条件を含む荷重項である。なお、解法としてはフロニタル法を採用している。

4. 数値計算例

本手法の妥当性・有効性を検討するために、図-2に示すような球面浅瀬上にある円島まわりの振幅分布の計算を行った。図-3に要素分割図と計算結果を示す。解析領域は、 Ω_1 上で境界要素により36分割し、 Ω_2 内で総要素数720、総節点数396の有限要素で分割している。なお入射波は、周期8分、振幅1mとした。図-4に円島面の振幅分布を示す。図中、実線が解析解、○印が本手法による計算結果、△印が従来の線形の有限要素を用いた結合解法（この際、考える波動関数は(7)式となる）による計算結果である。図より、本手法による計算結果は、従来の結合解法に比べて精度がよく、とくに円島背面においてそれが顕著であることがわかる。

5. おわりに

外部波動問題のための新しい結合解法を提案した。本結合解法による解は、従来の結合解法による解に比べ精度がよく、計算時間・計算機容量の面で向上が図られると考えられる。

参考文献 1) 樫山・桜井・川原：波動解析のための境界型

有限要素法、第39回年譜、1984、pp 239-240

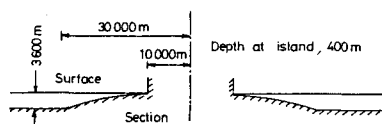


図-2 円島周辺の金台直断面図

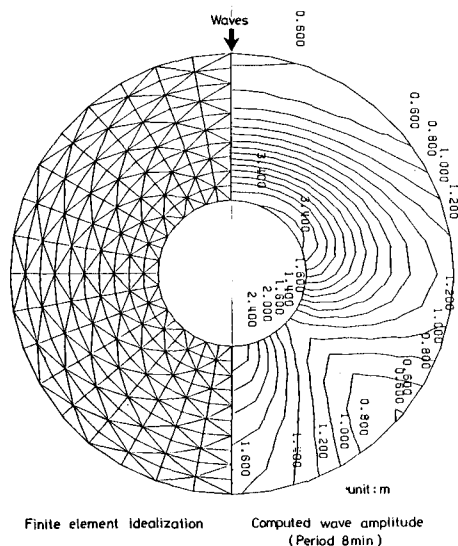


図-3 要素分割図と計算結果

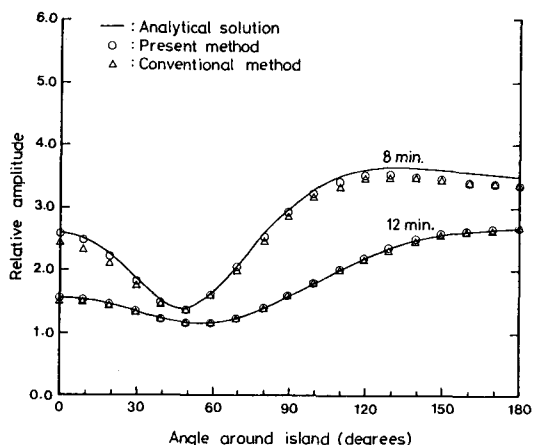


図-4 円島面の振幅分布