II-120　周期的浅水長波流れの境界要素法による定式化について

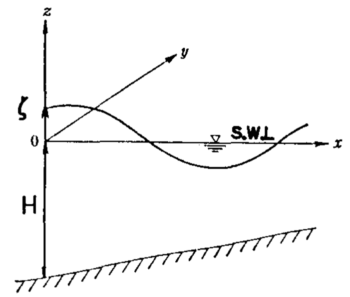
佐藤工業（株）　正員○金子典由　東平光生
中央大学　　　　正員　川原睦人

1　はじめに

海洋の流れの主な要因である潮汐流れは周期的な繰返しのある現象である。この潮汐の解析手法の一つとして筆者の一人により周期的ガレルキン法[1)]が提案されている。この手法は波動を基本周期をもつ波に分解し、その基本周波数に対して解析を行い、その後、再合成する手法である。また、この解析では空間方向では有限要素法を用いている。有限要素法解析では解析領域内を要素に分割するために任意形状の解析が可能である反面、解析領域を限定し、境界条件を必要とする。そのため、無限に伝播する流れや波の進行の解析が境界において制限されたりする場合が生じる。また、境界条件の影響が生じないようにするためには解析領域をかなり広範囲に取る必要があり、膨大な要素分割と演算時間を要する。これに対して、近年、普及してきた境界要素法は境界上のみに着目した解析であり、解析領域が無限に広がる解析に有効である。しかし、水深などの地形が変化する解析では、地形が変化する領域ごとに境界を設定しなければならない。また、非線形解析や物体力を考慮した解析では解析領域内にセルと呼ばれる粗いメッシュを分割する必要が生じ境界要素法の利点が損われる。そこで、有限要素法と境界要素法の両者の利点を生かす方法として結合解法が考えられる。すなわち、非線形挙動を考慮した着目領域は有限要素領域とし、その周辺に流れや波の進行を妨げないよう境界要素領域とする結合解法により、無限遠方へ伝播したり、無限遠方より伝播してくる流れや波の解析が容易になると考えられる。本報告ではその第一ステップとして周期的浅水長波流れの境界要素法の定式化について検討する。

2　基礎方程式

線形浅水長波流れの基礎方程式を以下に示す。



図－1　記号の説明

運動方程式

$$\dot{u}_i - \tau_{ij,j} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

構成方程式

$$\tau_{ij} = -g\,\zeta\,\delta_{ij} + A_\ell(\,u_{i,j} + u_{j,i}\,) \quad \cdots\cdots (2)$$

表面力の定義式

$$t_{ij} = \tau_{ij}\, n_j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

連続の方程式

$$\dot{\zeta} + H\, u_{i,i} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

ここで、u_i は流速、ζは波高、Hは平均水深、gは重力加速度、A_ℓは渦動粘性係数、n_j は外向き法線単位ベクトル、　は時間に対する偏微分、また、添字i j は総和規約に従うものとする。基礎方程式（１）は、慣性項やコリオリ力などの二次的な流れの項を無視している。また、連続の方程式においては、平均水深は波高に比べて充分深く、海底に急激な変化がないものとした。

流れは周期的な繰返しであるものと見なし、流速u_i と波高ζを下の調和関数により仮定する。

$$u_i = \bar{u}_i\, e^{i\omega t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5) \qquad \zeta = \bar{\zeta}\, e^{i\omega t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

（５）、（６）式を基礎方程式（１）～（４）に代入する。（４）式よりζは

$$\zeta = -\frac{H}{i\omega}\, u_{i,i} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

となる。なおこれ以降の表示は（５）、（６）式の－を省略して表す。
（７）式を（２）式に代入すると波高ζの消去された方程式となる。

$$\tau_{ij} = -\frac{gH}{i\omega} u_{k,k}\, \delta_{ij} + A\ell(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad \text{.............(8)}$$

3　境界要素法

境界積分方程式を求めるために（１）式に重み関数 u_i^* をかけ解析領域Ωに対して積分する。

$$\int_\Omega u_i^* (i\omega\, u_i - \tau_{ij,j})\, d\Omega = 0 \qquad \text{.............(9)}$$

さらに、部分積分を２回行い、（２）式と（３）式の関係を用いて整理すると次式を得る。

$$\int_\Omega -i\omega \left[\omega^2 u_i^* + (gH+i\omega A_\ell)\, u_{k,ki}^* + i\omega A_\ell\, u_{i,kk}^* \right] u_i \quad d\Omega + \int_\Gamma t_i^*\, u_i\, d\Gamma$$

$$= \int_\Gamma t_i\, u_i^*\, d\Gamma \qquad \text{.............(10)}$$

（10）式より、下式を満足する基本解を求めれば境界要素法の定式化が可能となる。すなわち、

$$\omega^2 u_i + (gH+i\omega A_\ell)\, u_{k,ki} + i\omega A_\ell\, u_{i,kk} = -\delta_i \qquad \text{.............(11)}$$

を満足する関数を求めることになる。この（11）式は次に示す動弾性のNavier-Cauchy の方程式と類似している。

$$\rho\omega^2 u_i + \mu/(1-2\nu)\, u_{k,ki} + \mu\, u_{i,kk} = -\delta_i \quad \text{.............(Navier-Cauchy の方程式)}$$

したがって、Navier-Cauchy の式のグリ－ン関数を用いることが可能となり、流速の基本解は

$$u_{k\ell} = 1/(4\omega A_\ell)\, H_0^{(1)}(\omega r/c_2)\, \delta_{k\ell} + i/(4\omega^2)\left[H_0^{(1)}(\omega r/c_2) - H_0^{(1)}(\omega r/c_1) \right]_{,k\ell}$$

$$\text{.............(12)}$$

となる。ここで、$H_0^{(1)}$ は第一種のハンケル関数を表し、r は載荷点から観測点までの距離を表す。また、C_1 、C_2 はNavier-Cauchy の式ではそれぞれ、縦波と横波の伝播速度あり、浅水流れでは

$$c_1^2 = gH + 2\, i\omega A_\ell \quad \text{.............(13)} \qquad c_2^2 = i\omega A_\ell \quad \text{.............(14)}$$

となる。そこで次の境界積分方程式を得る。

$$i\omega u_i + \int_\Gamma t_{ik}^*\, u_k\, d\Gamma = \int_\Gamma u_{ik}^*\, t_k\, d\Gamma \qquad \text{.............(15)}$$

これに流速 u_k と表面力 t_k を形状関数を用いて離散化すると次の境界要素法の定式化を得る。

$$[\ H\ ]\,\{u\} = [\ G\ ]\,\{t\} \qquad \text{.............(16)}$$

4　おわりに

周期的浅水長波流れの境界要素法の定式化を示した。本手法のように流速 u_i と波高ζを同じ周期の調和関数に仮定して基本周期ωについて積分方程式を定式化すると、Navier-Cauchy の方程式と類似した基本解となることがわかる。これを基本解として用いて直接法による境界要素法の定式化が可能になった。

参考文献

（１）M.Kawahara and K.Hasegawa "Periodic Galerkin Finite Element Method of Tidal Flow", Int. J. Num. Meth. Eng. Vol.12 pp.115～127, 1978