

中央大学 学生員 ○ラマスワミ

中央大学 学生員 安重 晃

中央大学 正 員 川原 睦人

1. はじめに

自由表面を有する流れでは、自由表面の形状が流れの状態に応じて変形するため、問題を解析する場合自由表面の位置が未知量となり、そこにおける境界条件は複雑な非線形方程式となる。そのため、自由表面を有する流れの問題は、解析的にも数値的にも取扱いが困難なものとされてきた。

そこで本論文では、有限要素を流れと共に移動させるラグランジュ的な考え方を導入することによって変形する自由表面境界の取扱いを容易にした解析手法を提案する。本解析法は、ナビエ・ストークスの運動方程式を基礎方程式としており、自由表面を有する粘性流れの解析が可能である。

2. 基礎方程式

図1に示すように解析領域を2次元鉛直平面とし、静止水面と平行に x_1 軸、鉛直上向きに x_2 軸をとる。流れの場 V における支配方程式は音速法¹⁾によって定式化された次のナビエ・ストークスの式と連続の式である。

$$\rho u_i / dt + \rho p_{,i} - \nu (\rho u_{i,j} + \rho u_{j,i})_{,j} - f_i = 0 \quad V \text{ 内} \quad (1)$$

$$\rho p / dt + \rho u_{i,i} = 0 \quad V \text{ 内} \quad (2)$$

ここに、 c は流体中の音の伝播速度、 ν は動粘性係数を表わす。

次に境界条件を考える。自由表面境界 S_1 では、応力のつり合い条件により次式が与えられる。

$$[-p \delta_{ij} + \nu (u_{i,j} + u_{j,i})] \cdot n_j = 0 \quad S_1 \text{ 上} \quad (3)$$

残りの境界 S_2 上では、流速が与えられているものとする。すなわち

$$u_i = \hat{u}_i \quad S_2 \text{ 上} \quad (4)$$

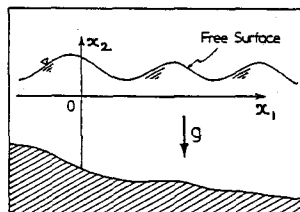


図1. 自由表面における座標系

3. 有限要素解析

式(1)、(2)の空間方向の離散化には、Galerkin法に基づく有限要素法により行なう。領域 V を三角形要素で分割し、流速、圧力に対して一次の形状関数を用いる。離散化の結果、次のようなマトリックス表示された有限要素方程式が得られる。

$$M_{\alpha\beta} \rho u_{\beta} / dt + C H_{\alpha\beta} p_{\beta} + \nu S_{\alpha\beta j} u_{\beta j} - N_{\alpha} f_{\alpha} = 0 \quad (5)$$

$$M_{\alpha\beta} \rho p / dt + C H_{\alpha\beta}^T u_{\beta i} = 0 \quad (6)$$

式(5)、(6)の時間方向の離散化には2段階陽的スキームを適用し次のアルゴリズムにしたがって計算をする。

ステップ1: $n+1$ 回目の流速の近似値として、 n 回目の流速を与える。

$$\tilde{u}_{\alpha i}^{(k+1)} = u_{\alpha i}^n \quad (7)$$

ステップ2: $n+1$ 回目の位置の近似値を求める。

$$\tilde{x}_{\alpha i}^{(k+1)} = x_{\alpha i}^n + \Delta t \tilde{u}_{\alpha i}^{(k+1)} \quad (8)$$

ステップ3: 位置 $\tilde{x}_{\alpha i}^{(k+1)}$ を用いて解 $(k+1)$ 回目の流速の近似値 $\tilde{u}_{\alpha i}^{(k+1)}$ を求める。

ステップ4: k 回目と $(k+1)$ 回目の流速の収束を次式で判定する。

$$|\tilde{u}_{\alpha i}^{(k+1)} - \tilde{u}_{\alpha i}^{(k)}| < \epsilon \quad (9)$$

ステップ5: 上の収束条件が満足されれば次の時間ステップへ進む。

$$u_{\alpha i}^{n+1} = \tilde{u}_{\alpha i}^{(k+1)} ; x_{\alpha i}^{n+1} = \tilde{x}_{\alpha i}^{(k+1)} \quad (10)$$

ステップ6: 条件(9)を満足しなければ $k = k + 1$ としてステップ2よりくり返し計算を行なう。

4. 数値解析例

(1) 孤立波の伝播

初期条件として2次元一様水深矩形水槽の中央にLaitoneの近似式より得られる孤立波を想定し、波の伝播および反射の過程など¹⁾に対して検討を加えた。図2は要素分割図、図3, 4に各時刻の流速ベクトルを示す。鉛直壁へのかけ上り高さはLaitoneの近似によって次のようになされる。

$$R_d = 2H_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{H_0}{\alpha} \right)^2 \quad (11)$$

そこで理論解を求めると1.01mとなる。

このとき解析結果は0.991mとなり理論解と良く一致している。

(2) 造波装置による波の発生と伝播

ここでは水理実験などで用いられるような造波装置をもつ水槽をモデル化し、波の発生と伝播について解析を試みる。この場合、流木場には粘性を考慮する。造波板の変位と速度は、次のようになされるものとする。

$$x(t) = -e \cos \sigma t \quad ; \quad u(t) = e \sigma \sin \sigma t \quad (12)$$

ここに、 e は造波板の片振幅、 T は周期を表わす。図5は要素分割図を示す。造波板が動き始めてから42秒後の流速ベクトル図、水圧分布図を図5, 6に示す。

5. おわりに

自由表面を有する粘性流体の流れに対する有限要素法を用いた新しい解法を提案し、孤立波の伝播、造波現象の解析を行なうことによって解法の有効性を検証した。本手法は貯槽内のスロッシング現象など、これまで問題が複雑なためにポテンシャル流れとしての解析しがなされていいた現象の解析に対しても有効であると考えられる。

6. 参考文献

1. 川原睦人, 有限要素法流体解析, 日科技連出版社, 1985

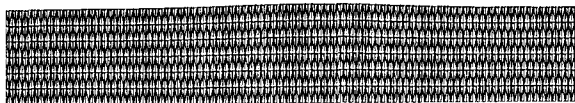


図2. 要素分割

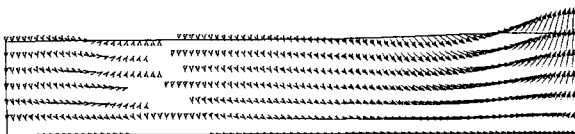


図3. 流速ベクトル ($t = 10.5 \text{ sec}$)

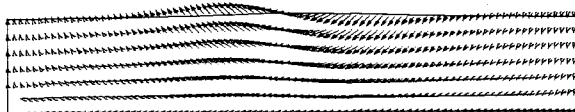


図4. 流速ベクトル ($t = 29.6 \text{ sec}$)



図5. 要素分割



図6. 流速ベクトル ($t = 42.0 \text{ sec}$)

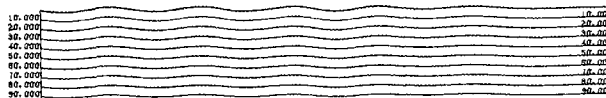


図7. 圧力分布 ($t = 42.0 \text{ sec}$)