

中央大学理工学部 正員 中山 司
中央大学理工学部 正員 川原 睦人

1. はじめに

自由表面を有する流体流れの現象を数値解析によってシミュレートする場合、時々刻々変形する自由表面の形状を追跡し、その形状に応じてそのつど有限要素や境界要素への再分割を行わなければならない。このような解析領域の変形と要素の再分割は計算誤差を生じ易く、自由表面形状の決定には慎重な計算が要求される。

一方、このような移動境界問題の解法として、等角写像を行なうことにより複素平面上での固定境界問題に変換して解く方法が古くから知られている。この解法を有限要素法や境界要素法と組み合わせると、要素再分割の必要がなく、連立一次代数方程式の係数行列をそのつど組み立て直す手間が省けるため、効率の良い数値解法を構成することができる。そこで本報告では、このような解法の定常自由表面問題への応用について検討する。

2. 定常自由表面問題の定式化

一様水深の水路内を一定の伝播速度で進行する孤立波の形状を求めることを考える。図1において、座標系 $O-xy$ を孤立波と共に孤立波の伝播速度 c で移動する動座標系とすれば、この問題は定常自由表面問題として定式化できる。非粘性、非圧縮流体、渦無し流れを仮定し、流体の動座標系に対する相対速度 (u, v) を用いて次のように速度ポテンシャル $\phi(x, y)$ と流れ関数 $\psi(x, y)$ を定義する。

$$u = \partial\phi/\partial x = \partial\psi/\partial y \quad (1a)$$

$$v = \partial\phi/\partial y = -\partial\psi/\partial x \quad (1b)$$

そこで、図1の (x, y) 平面上的流れの場 V を図2の (ϕ, ψ) 平面上的矩形領域 $\mathcal{D}$ に変換する。このとき (ϕ, ψ) 平面上で記述した基礎方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \psi^2} = 0 \quad \mathcal{D} \text{ 内} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \psi} \right)^2 \right\}^{-1} + g\psi = H_0 \quad C_1 \text{ 上} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0 \quad C_2 \text{ および } C_4 \text{ 上} \quad (4)$$

$$\psi = 0 \quad C_3 \text{ 上} \quad (5)$$

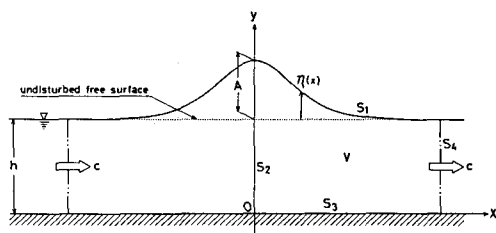


図1 孤立波と座標系

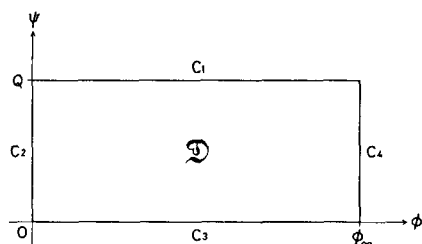


図2 (ϕ, ψ) 平面

ここで未知量は $\psi(\phi, \psi)$ である。また孤立波の対称性を考慮して (x, y) 平面上的 $x \geq 0$ の領域を解析対象とし、境界 S_i ($i=1, 2, 3, 4$) は境界 C_i に対応する。 $H_0 = c^2/2 + gh$ であり、 h は静水の水深を表わす。

3. 境界要素法による定式化

グリーンンの公式を用いて、式(2)-(5)を次の非線形積分方程式に変換する。

$$\pi \psi(p) + \oint_{C_1+C_2+C_4} \psi(q) \frac{\partial}{\partial n(q)} \left(\ln \frac{1}{r} \right) d\sigma(q) - \oint_{C_1} \psi_p(q) \ln \frac{1}{r} d\sigma(q) - \oint_{C_3} \frac{\partial \psi}{\partial n(q)} \ln \frac{1}{r} d\sigma(q) = 0 \quad (6)$$

ここで、 r は境界上にとった任意の2点 $P(x, y)$ と $Q(x, y)$ 間の距離を表わす。 $y(P)$ は P における y の値を意味し、 $n(Q)$ は Q において境界上に立てた外向き法線を表わす。 y_ψ は式(3)より導かれるもので

$$y_\psi \equiv \frac{\partial y}{\partial \psi} = \sqrt{\frac{1}{2(H_0 - gy)} - \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2} \quad (7)$$

で与えられる。また、 $\oint$ は積分のコーシーの主値をとることを意味する。

境界を多数の直線要素に分割し、各要素内において y , $\partial y / \partial n$ の値は一定と仮定する。要素の中央点を選点とする選点法により式(6)を離散化し、 y に関する非線形連立代数方程式を導く。これを Newton-Raphson 法を用いて反復計算すれば、解析が可能となる。

4. 解析結果

本解析では、伝播速度 c を仮定し、それに対応する波高の孤立波の形状を計算するという方法をとる。

図3は、孤立波の波高 A と伝播速度 c の関係をプロットしたものである。本方法による計算値を、Daily and Stephan^[2] の実験データや Boussinesq, Rayleigh, McCowan, Laitone らの各理論解と比較している。実験値と計算値の定性的一致は良好である。

図4は、無次元波高 $A/h = 0.593$ の孤立波について、本方法により計算された形状と Daily らの実験で観測された形状との比較を行なったものである。縦軸は静止水面から測った自由表面変位 $\eta = y - h$ を、横軸には座標 x を、それぞれ静水の深さ h で無次元化してとっている。図中には、理論解の中で最も実際の形状に近いとされている Boussinesq の理論形状も示してある。

図5は、図3の計算結果をもとにして孤立波の峰における無次元速度水頭 $\frac{1}{2}(c/\sqrt{gh})^2 - A/h$ を計算し、それを無次元波高 A/h に対してプロットしたものである。計算値を (速度水頭) = 0 に外挿することにより、孤立波のとり得る最大波高 $(A/h)_{\max}$ が次のように得られる。

$$(A/h)_{\max} = 0.855$$

この値は、Laitone^[3] が理論的に求めた値 $\frac{8}{11}$ (≈ 0.727) よりもやや大きい。

参考文献

- [1] Chan, R.K.-C. : J. Comp. Physics, Vol.16, pp.32-48, 1974.
- [2] Daily, J.W. and Stephan, S.C., Jr. : Proc. 3rd Conference on Coastal Engineering, pp.13-30, 1952.
- [3] Laitone, E.V. : J. Fluid Mech., Vol.9, pp.430-444, 1960.

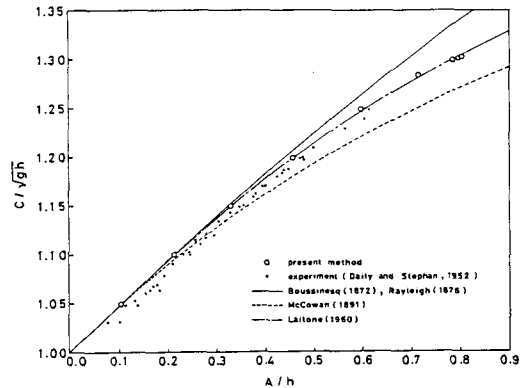


図3 波高と伝播速度の関係

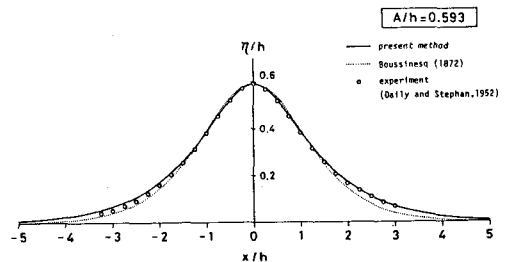


図4 孤立波の形状

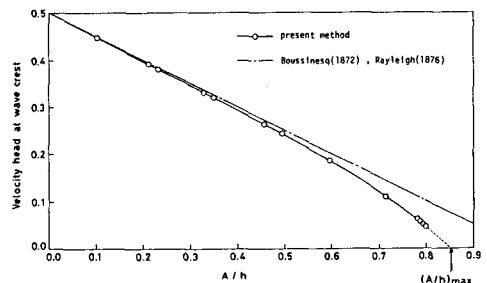


図5 孤立波の最大波高 $(A/h)_{\max}$ の推定