

清水建設(株) 土木本部設計部 正会員○征矢 雅宏
 清水建設(株) 土木本部設計部 正会員 長谷川 誠
 清水建設(株) 土木本部設計部 正会員 大西 勝

1. はじめに

本報告は、非定常粘性流の解析を、境界要素法を用いて行ったものである。従来から有限要素解析に使用された流れ関数、渦度やペナルティ法には依らず、Navier-Stokesの方程式に速度の基本解を、また非圧縮性の条件式に圧力の基本解を、それぞれ重み関数としてかけた重み付き残差表示式から特異微分方程式を誘導し、速度と圧力の基本解を直接求めた。これらの基本解を速度と圧力に関する2つの積分方程式に導入し、2次元解析を行って本手法の有効性を確認した。

2. 速度と圧力の基本解および積分方程式

Navier-Stokesの方程式と非圧縮性の条件式を式(1)、(2)に示す。

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j U_{i,j} \right) = \rho X_i - P_{,i} + \mu U_{i,jj} + \mu \frac{U_{j,ji}}{3} \quad (1)$$

$$U_{i,i} = 0 \quad (2)$$

ここで ρ 、 μ は流体の密度、粘性係数、 P は圧力、 X_i は流体に作用する物体力の i 方向成分を表わす。速度の基本解を U_{ki}^* 、圧力の基本解を P_k^* とし、これらを式(1)、(2)にかけ合わせると次のような重み付き残差表示式が得られる。ただし U_{ki}^* は、単位力の i 方向作用により、 k 方向に発生する速度である。

$$0 = \int_{t_0}^t \int_{\Omega_s} U_{ki}^* \left\{ \frac{\partial U_i}{\partial t} - \mu (U_{i,jj} + U_{j,ji}) + P_{,i} + \rho U_j U_{i,j} - \rho X_i \right\} d\Omega_s dt + \int_{t_0}^t \int_{\Omega_s} (-P_k^*) U_{i,j} d\Omega_s dt$$

また、 U_{ki}^* も同様に非圧縮性の条件を満足するものとして、

$$U_{ki,i} = 0 \quad (4)$$

式(2)、(4)を適用して式(3)の部分積分を行えば、基本解の満足すべき特異微分方程式が式(5)のように決定でき、式(6)に示す速度に関する積分方程式が得られる。ただし領域 Ω 、境界 Γ 、ベクトル $\mathbf{x}$ に関する添字 o 、 s は、それぞれ観測点とソース点を意味し、 t_0 は初期時刻を表す。

$$-\rho \frac{\partial U_{ki}^*}{\partial t_0} - \mu U_{ki,jj} + P_{k,i}^* + \tilde{\delta}_{ki} \delta(\mathbf{x}_o - \mathbf{x}_s) \delta(t - t_0) = 0 \quad (5)$$

$$C_{ki} U_i(\mathbf{x}_o, t) + \iint T_{ki}^* U_i d\Gamma_s dt = \iint U_{ki}^* T_i d\Gamma_s dt + \int \rho U_{ki}^* U_i \Big|_{t_0}^t d\Omega_s$$

$$+ \iint \rho U_{ki}^* U_{j,n_j} U_i d\Gamma_s dt - \iint \rho U_{ki}^* X_i d\Omega_s dt - \iint \rho U_{ki,j} U_j U_i d\Omega_s dt \quad (6)$$

ここで $\tilde{\delta}_{ki}$ は、Kroneckerのデルタ、 $\delta(\mathbf{x}_o - \mathbf{x}_s)$ 、 $\delta(t - t_0)$ はDiracのデルタ関数である。また n_j は、境界線上の法線ベクトルの j 方向成分、 T_{ki}^* 、 T_i については次式に示す通りである。

$$T_{ki}^* = -\left\{ -\tilde{\delta}_{ij} P_k^* + \mu (U_{ki,j}^* + U_{kj,i}^*) \right\} n_j \quad (7)$$

$$T_i = -\left\{ -\tilde{\delta}_{ij} P_j + \mu (U_{i,j} + U_{j,i}) \right\} n_j \quad (8)$$

なお、 C_{ki} については後述する。

速度と圧力の基本解 U_{ki}^* 、 P_k^* はFourier変換を利用して式(4)、(5)から求まる。¹⁾ 2次元の場合は、

$$U_{ki}^* = \frac{-1}{4\pi\rho} \left\{ \left(\tilde{\delta}_{ki} - \frac{x_k x_i}{R^2} \right) \frac{1}{\nu\tau} + 2 \left(\tilde{\delta}_{ki} - \frac{2x_k x_i}{R^2} \right) \frac{1}{R^2} \right\} e^{-\frac{R^2}{4\nu\tau}} + \frac{1}{2\pi\rho} \left(\frac{\tilde{\delta}_{ki}}{R^2} - \frac{2x_k x_i}{R^4} \right) \quad (9)$$

$$P_k^* = \frac{x_k}{2\pi R^2} \delta(\tau)$$

ただし、 $R = \sqrt{x_i x_i}$ 、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_o - \mathbf{x}_s$ 、 $\tau = t - t_0$ 、 ν :動粘性係数 (10)

また、定常の基本解は文献²⁾に与えられており、2次元の場合は、以下ようになる。

$$U_{ki}^* = \frac{-1}{4\pi\mu}(-\delta_{ki} \ln R + \frac{x_k x_i}{R^2}) \quad (11) \quad P_k^* = \frac{x_k}{2\pi R^2} \quad (12)$$

次に圧力に関する積分方程式については、まず式(1)を*i*方向に微分した式(13)に対し、

$$\rho \frac{\partial U_{i,i}}{\partial t} - \mu(U_{i,j,j} + U_{j,j,i}) + P_{,ii} + (\rho U_j U_{i,j})_{,i} - \rho X_{i,i} = 0 \quad (13)$$

式(2)を適用すれば、圧力がPoisson方程式を満足することがわかる。これよりLaplace方程式の基本解 H^* を、重み関数として式(13)にかけた重み付き残差表示式(14)を作り、部分積分を行えば、時刻 $t=t_0$ において圧力に関する積分方程式が式(15)のように得られる。

$$0 = \int H^* \left\{ \rho \frac{\partial U_{i,i}}{\partial t_0} - \mu(U_{i,j,j} + U_{j,j,i}) + P_{,ii} + (\rho U_j U_{i,j})_{,i} - \rho X_{i,i} \right\} d\Omega_0 \quad (14)$$

$$P(x_0) = -\int P_i^* T_{i,j} d\Gamma_0 - 2\int \mu P_{i,j,n_j} U_i d\Gamma_0 + \int \rho P_{i,j}^* U_j U_i d\Omega_0 - \int \rho P_i^* U_{j,n_j} U_i d\Gamma_0 - \int \rho P_i^* \left\{ \frac{\partial U_{i,i}}{\partial t_0} - X_{i,i} \right\} d\Omega_0 \quad (15)$$

ただし、ここでは $H_{,ii}^* + \delta(x) = 0$ および $H_{,i}^* = P_{,i}^*$ の関係を使用している。

3. 基本解の時間積分と特異性の評価

積分方程式(6)を解くに当たり、時間積分を行わねばならないが、本報告では微小時間間隔(Δt)内で、速度が一定と仮定して、基本解を t_0 に関して直接積分した。時間積分後の基本解を $\tilde{U}_{ki}^*, \tilde{P}_k^*$ とすれば、

$$\tilde{U}_{ki}^* = \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ \frac{\tilde{\delta}_{ki}}{2\nu} Ei(-X_0) - \frac{\tilde{\delta}_{ki}}{2\nu X_0} e^{-X_0} - \frac{x_k x_i}{\nu X_0 R^2} e^{-X_0} \right\} + \frac{\Delta t}{2\pi\rho} \left\{ \frac{\tilde{\delta}_{ki}}{R^2} - \frac{2x_k x_i}{R^4} \right\} \quad (16)$$

$$\tilde{P}_k^* = \frac{x_k}{2\pi R^2} \quad \text{ただし、} X_0 = \frac{R^2}{4\nu\Delta t} - Ei(-X_0) : \text{積分指数関数} \quad (17)$$

また、式(16)を微分したものと式(17)を用いれば、式(7)より $\tilde{T}_{ki}^*$ を求めることができる。

次に式(6)の C_{ki} は、領域内、境界上、外部において以下に示す値を取る

るが、 $\tilde{C}_{ki}$ は境界上の特異性を評価するものである。

$$C_{ki} = \begin{cases} \delta_{ki} & \in \Omega_0 \\ \tilde{C}_{ki} & \in \Gamma_0 \\ 0 & \in \Omega_0 \end{cases} \quad (18)$$

図1に示す微小円を境界節点に付加して、節点を領域内部の点と見なし、その後極限操作を行えば、 $\tilde{C}_{ki}$ は次式のように表わすことができる。

$$\tilde{C}_{ki} = \tilde{\delta}_{ki} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_2}^{\theta_1} T_{ki}^* \varepsilon d\theta$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\Delta\theta}{2\pi} - \frac{\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2}{4\pi} & \frac{\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2}{4\pi} \\ \frac{\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2}{4\pi} & \frac{\Delta\theta}{2\pi} + \frac{\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2}{4\pi} \end{bmatrix} \quad (19)$$

ただし $\Delta\theta = 2\pi - \theta_1 + \theta_2$

なお、解析には2次元急拡断面モデルを用いたが、その結果は、当日発表する。

参考文献

- 1) 長谷川他: 非定常非圧縮粘性流の基本解とその2次元問題への適用、土木学会論文報告集に投稿中
- 2) Brebbia, C.A. et al.: Boundary Element Technique, Springer-Verlag, 1984

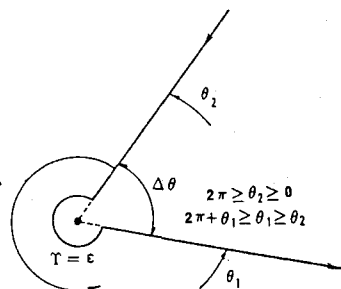


図1