

信州大学工学部 正 員 富所 五郎  
 信州大学工学部 正 員 荒木 正夫  
 信州大学大学院 学生員 阿尾 吉章

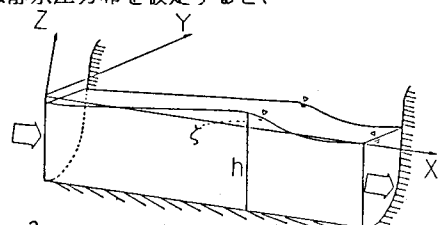
1 はじめに 本研究は流れの三次元性が顕著に現われる開水路合流部を例にとりて、有限要素法 (FEM) を用いた三次元数値解析を行い、水理実験結果と比較することにより、その妥当性を検討したものである。ここでの三次元数値解析法は形状関数に水平方向の区分的多項式と鉛直方向の余弦関数の積を用いた Galerkin FEM であり、この方法によって定常問題を非定常解析の収束解として解析を行った。

2 流れの基礎式 開水路における三次元流れの基礎式は静水圧分布を仮定すると、

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + L \cdot u = g I_x - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + D \cdot u + \frac{\partial}{\partial z} (A_h \frac{\partial u}{\partial z}) \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial t} + L \cdot v = g I_y - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + D \cdot v + \frac{\partial}{\partial z} (A_h \frac{\partial v}{\partial z}) \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$



$$L = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad D = \frac{\partial}{\partial x} (A_h \frac{\partial}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_h \frac{\partial}{\partial y})$$

である。ここに、x 軸は x 方向の平均勾配  $I_x$  に平行に、y 軸は y 方向の平均勾配  $I_y$  に平行に水面付近にとり、また、z 軸は x y 平面に直角に上方を正としている。また、u, v, w はそれぞれ x, y, z 方向の流速成分、t は時間、ζ は x y 面から自由水面までの高さ、g は重力加速度、 $A_h, A_v$  はそれぞれ水平、鉛直渦動粘性係数である。(図 1 参照)

3 基礎式の離散化 式(1),(2) に式(3) より求めた w を代入した式と、式(3) を水底から水面まで積分し、水底と水面の運動学的条件を適用した式に Galerkin FEM を用いて空間変数に対する離散化を行った。ここで形状関数として水平方向の区分的多項式と鉛直方向の余弦関数との積を用いた。総和規約を用いると、近似関数は、

$$\left. \begin{aligned} u &= N_i \cdot \cos(B_p \cdot (z - \zeta)) \cdot u_{pi} \\ v &= N_i \cdot \cos(B_p \cdot (z - \zeta)) \cdot v_{pi} \end{aligned} \right\}, \quad B_p = \frac{(p-1)\pi}{h + \zeta} \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\zeta = N_i \cdot \zeta_i$$

$$(p = 1, 2, \dots\dots m \quad i = i, j, k)$$

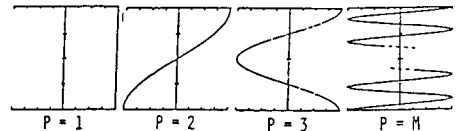


図 2 鉛直方向の形状関数

となる。ここに、i, j, k は三角形一次要素の頂点、m は鉛直方向の形状関数の展開項数である。(図 2 参照) 次に、時間変数については、two-step Lax-Wendroff 法によって離散化を行った。これによって得られた連立方程式を step-by-step に解けばすべての時刻における未知量の値が決定できる。

4 数値解析法 3 で得た連立方程式を解くためには質量行列の逆行列を求めねばならないが、本研究では、計算時間、容量の節約を計るために近似的に解を求める行列の集中化法を用いた。また、壁面でのスリップ速度を認めて解析を行った。ここで問題となるのは図 3 に示す合流部の隅点 a, b である。点 a, b では図 3 のような補正をした。すなわち、各要素に流量成分  $U_{ay}, U_{ax}, U_{by}, U_{bx}$  により流出入が生じるが、実際には壁からの流出入はないので、この逆の流出入を各要素に与えるものである。また、得られる解に現われる場所的な振動を抑制するために、フィルターの作用と境界値の変更を行った。フィルターは、節点 k の未知量を  $V_k$  とし、フィルター作用後の値を  $\bar{V}_k$  とすると、 $\bar{V}_k = (V_k + \tilde{V}_k) / 2$

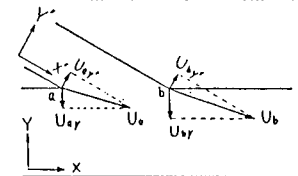


図 3 流れ補正

と変更するものである。ここに $\tilde{V}_k$ は節点 $k$ を共有する要素のこの節点を除く未知量の平均値である。境界値の変更は境界条件を下流では流速と水深にし、上流では流量として、上流境界の水深と流速はこの流量を満足する範囲内で自由に変動させるものである。なお、渦動粘性係数はReynoldsの相似則を仮定し、Elderに従い、 $A=Kn\sqrt{g(\bar{u}^2+\bar{v}^2)}\cdot h^{1/2}$ とした。ここに $n$ はManningの粗度係数、 $h'$ は水深、 $\bar{u}, \bar{v}$ は鉛直平均流速、 $K$ は定数で $A_v$ に対しては0.068、 $A_h$ に対しては6.0とした。また、 $\tau_x = gn^2 u \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} / h^{1/2}$ 、 $\tau_y = gn^2 v \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} / h^{1/2}$ より底面、壁面摩擦を評価した。

5 数値解析例と考察 解析例は幅50cm、勾配1/272、長さ13mの主水路の下流部から6mのところ幅30cm、勾配1/230、長さ5mの支水路が30度の角度で合流するもので粗度は0.0125である。図4、5は、流量16 l/s、最下流端の水深10.3cmの場合の水深と水平方向の流速分布を示したものである。(但し、紙面の都合上、流速分布は水面下2.5cm、6.5cmのみ示すに留めた。)なお、数値解は時間刻み幅を0.05秒とし、前述のフィルターの作用と境界値の変更を3秒ごとに行って求めた。数値解と実験値を比較すると、流速は、内側の隅点付近を除いて、ほぼ一致している。しかし、水深に関しては、かなり近い値ではあるが、実験値が合流部において水位低下の傾向を示しているのに対し、数値解は上昇の傾向にある。これは、底面、壁面摩擦及び、渦動粘性係数の評価法に問題があると思われるので、今後検討する必要がある。

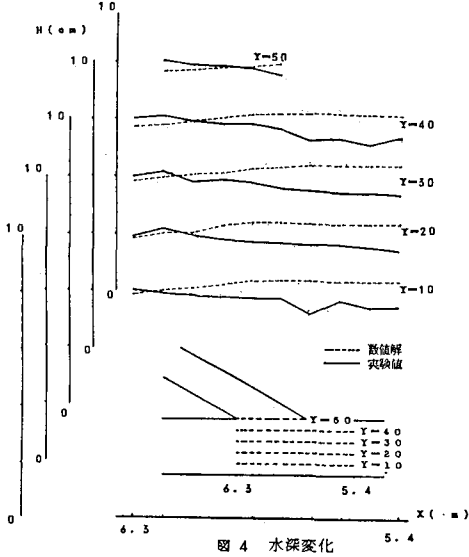


図4 水深変化

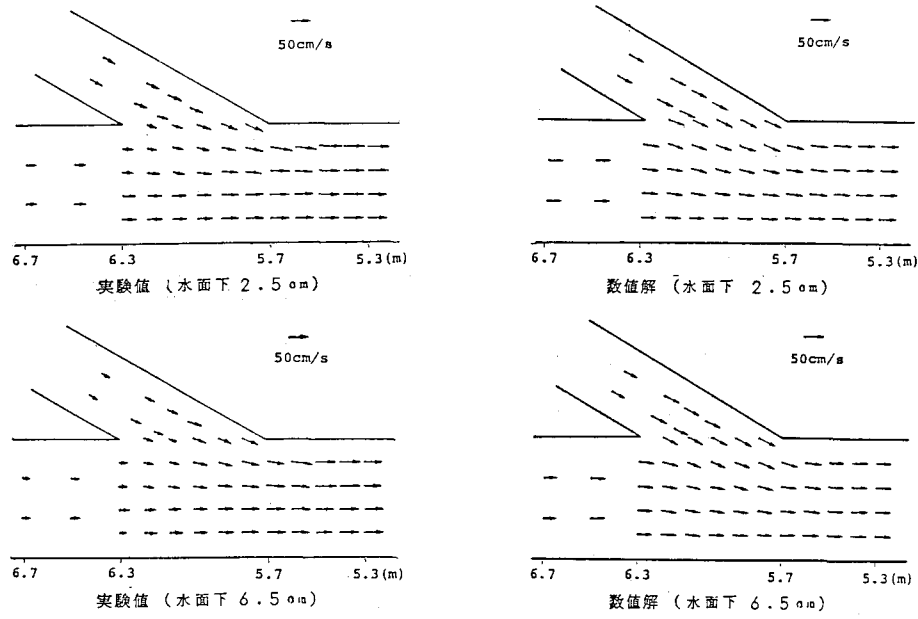


図5 水平方向の流速分布

参考文献

1) 富所・荒木・吉田：開水路の流れの三次元数値解析法，第29水理講演会論文集，1985・2，pp.727-732