

鳥取大学 工学部 正員 ○檜谷 治
鳥取大学 工学部 正員 道上 正規
鳥取大学 工学部 正員 鈴木 幸一
鳥取大学 大学院 学生員 山根 裕文

1. はじめに

湖流を三次元的に解析する場合、基礎式を鉛直方向に離散化する必要があるが、一般的には差分法を用いる場合が多い。本研究は、従来の湖流解析において水平方向の離散化によく用いられている有限要素法を鉛直方向の離散化に用いたC.Koutitasらが提案した解析法を用い、従来の実験結果などとの比較検討を行なうものである。また、この解析方法は水平方向には差分法を時間積分法にFractional Step 法を用いたもので計算時間が非常に速いという特徴を有している。

2. 解析方法¹⁾

基礎式および境界条件は次式に示すような一般的に湖流解析に用いられるもので、(1) 運動量の水平方向の変化は小さいものとし、水平渦動粘性係数項の省略(2) 水の密度は時間的、空間的に一定などの仮定をもうけている。

運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v + g \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} (A_v \frac{\partial u}{\partial z}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u + g \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} (A_v \frac{\partial v}{\partial z}) = 0 \quad (2)$$

連続式

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (H U) + \frac{\partial}{\partial y} (H V) = 0 \quad (3)$$

ここに、 t は時間、 x 、 y および z は座表軸で x は東を正、 y は北を正とし、 z は鉛直上方に正で平均水面を $z = 0$ とする。また、 u 、 v および w は、それぞれ x 、 y および z 方向の流速成分であり、 p は圧力、 ρ は水の密度、 f はコリオリ係数、 A_v は鉛直渦動粘性係数、 ξ は平均水面からの水位上昇量、 H は全水深、 U 、 V は平均流速、 g は重力加速度、 h は平均水深である。

境界条件 底面 Non-Slip条件
岸 Slip条件

$$\text{水面 } \tau_x = A_v \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \tau_y = A_v \frac{\partial v}{\partial z} \quad (4)$$

ここに、 τ_x, τ_y は風によって生じる水面のせん断応力である。

時間積分法としてFractional Step 法を用いるわけであるが、これは基礎式の時間微分項を積分するとき、2段階に分割して行なう方法であり、本研究の場合、式(1)、(2)は以下のように変形する。

$$\left. \begin{aligned} \text{Step 1} \quad \frac{u_* - u^n}{\Delta t} &= -u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} - g \frac{\partial \xi^{n+1/2}}{\partial x} + f v^{n+1/2} \\ \frac{v_* - v^n}{\Delta t} &= -u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial v^n}{\partial y} - g \frac{\partial \xi^{n+1/2}}{\partial y} - f u^{n+1/2} \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Step 2} \quad \frac{u^{n+1} - u_*}{\Delta t} &= \frac{\partial}{\partial z} (A_v \frac{\partial u_*}{\partial z}) \\ \frac{v^{n+1} - v_*}{\Delta t} &= \frac{\partial}{\partial z} (A_v \frac{\partial v_*}{\partial z}) \end{aligned} \right\} (6)$$

ここに、 n は時間ステップであり、 u_* 、 v_* は計算を進めて行くために仮に用いる仮想速度である。

つぎに、鉛直方向にGalerkin有限要素法、水平方向に差分法を用いて基礎式を離散化する。その際の解析メッシュを図-1に示す。有限要素法で用いる補間関数 N_k は線形関数とし、その結果流速 u 、 v の試験関数は

$$u = N_{k+1} \cdot u_{k+1} + N_k \cdot u_k, \quad v = N_{k+1} \cdot v_{k+1} + N_k \cdot v_k \quad (7)$$

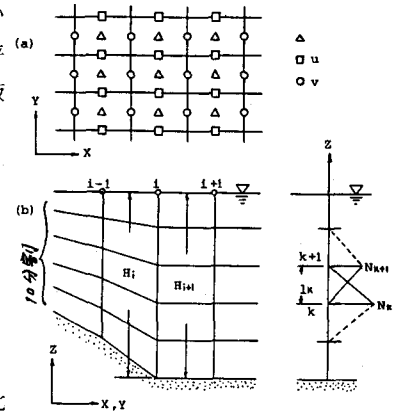


図-1 解析メッシュ

で表わされる。つぎに、式(5),(6) に Galerkin 有限要素法を適用し部分積分を行なうと次式が得られる。

$$\text{Step 1} \quad \int_{\ell_k} \left\{ \frac{u_x - u^n}{\Delta t} + u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta^{n+1/2}}{\partial x} - f v^{n+1/2} \right\} N_\alpha dz = 0 \quad (8)$$

$$\text{Step 2} \quad \int_{\ell_k} \left\{ \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right\} N_\alpha dz + \int_{\ell_k} \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} A_v \frac{\partial u^{n+1}}{\partial z} dz - N_\alpha A_v \frac{\partial u^{n+1}}{\partial z} \Big|_{\ell_k} = 0 \quad (9)$$

計算は、式(8) を用いることにより仮想速度 u_*, v_* を求め、これを用いて式(9) より u, v が求まる。また、水位変動量 ζ については、式(3) を差分化し、

$$\zeta_{i,j}^{n+1/2} = \zeta_{i,j}^{n-1/2} - \Delta t \cdot H_{i,j} \cdot \left\{ \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n}{\Delta y} \right\} \quad (10)$$

式(10)により順次求められる。

ここで、 u, v の水平方向の導関数は中央差分を用いている。また、式(8),(9) をみると未知数 u, v は水平方向に対して独立となっており、計算は Band matrix を用いると各々の点で 11×2 の Matrix を計算すればよく、計算時間が非常に速い。

3. 解析結果

図-2および図-3に解析結果と実験結果を示す。実験結果は村岡²⁾が行なったもので、風の強さは水面上20cmで3.92m/secで摩擦応力は0.225 dyne/cm²である。解析に用いる鉛直渦動粘性係数は $3.98 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ で時間間隔は0.05sとした。また、実験結果の状態が十分定常に達したものと考えられるので、解析値としてはほぼ定常に達したと思われる50秒後の値を用いた。まず、図-2は上層および下層の流速分布を示したものであるが、全体的な流況および流速のオーダーはよく一致していると思われる。つぎに、図-3は図-2に示す A~E 地点における流速の鉛直分布を比較したものである。若干分布形状が異なる部分もあるが、この原因は鉛直渦動粘性係数を鉛直方向に一定にしているためと考えられ、全体的にはよく再現できているものと思われる。

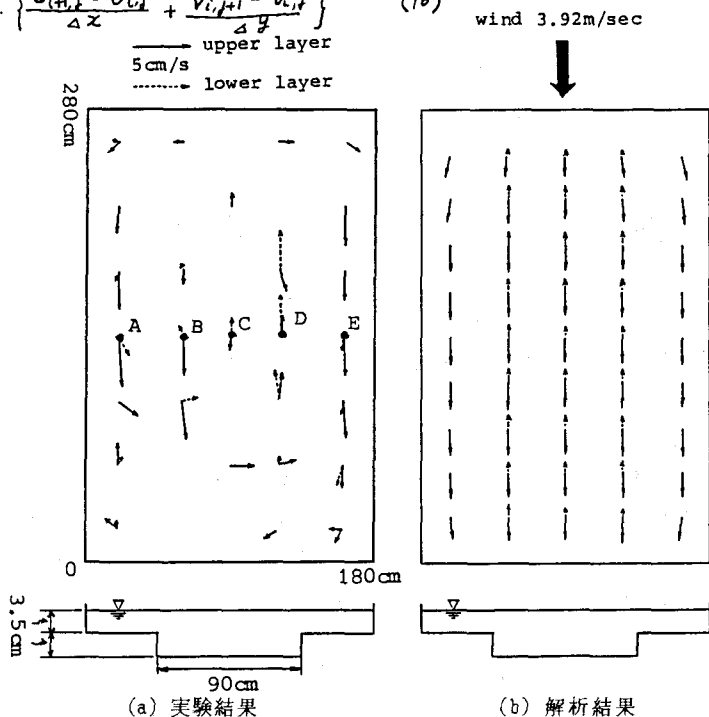


図-2 流速分布

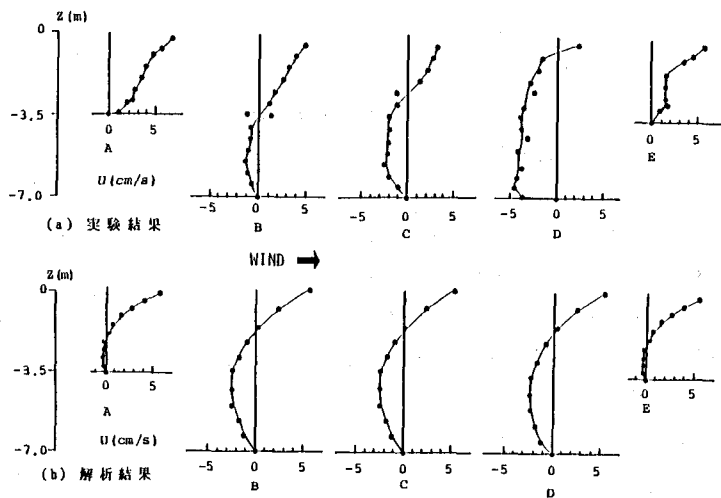


図-3 鉛直流速分布

参考文献 1) C. Koutitasら: Proc, ASCE, HY11, 1980. 2) 村岡・福島: 国立公害研究所報告、第19号、1978.