

兵庫県庁 正員 寺谷 毅
神戸大学工学部 正員 松梨順三郎

1. はじめに

近年の急速な人為的汚濁の進行により、閉水域である内湾、内海、湖沼の富栄養化の進行は著しく、種々の水質障害を生じ、しばしば社会問題として取り上げられている。このような富栄養化現象を論ずるにあたっては、現象の要因とされる栄養塩類の水域における収支を把握することが重要であり、従来から閉水域への流入汚染質の拡散輸送について水域を平面2次元として扱ったF.E.M.やF.D.M.による数値解析が行われてきた。

本研究では、3次元問題を2次元問題に置き換えることが可能であるという特性をもった境界要素法に注目し、富栄養化現象をより明確に把握するため特に底泥からの栄養塩の溶出による拡散に注目した3次元拡散解析への境界要素法の適用を試み、理論上の対比を軸にその可能性を検討した。

2. 境界要素法による定式化

閉水域を平均流のない乱流場とみなすと、現象の支配方程式及び境界条件は次式で表される。

$$\text{領域 } \Omega \text{ 内} ; \frac{\partial}{\partial x}(D_x \frac{\partial C}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(D_y \frac{\partial C}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(D_z \frac{\partial C}{\partial z}) = 0 \quad (1)$$

$$\text{境界 } S_1 \text{ 上} ; C = \bar{C} \quad (2) \quad \text{境界 } S_2 \text{ 上} ; \bar{g}_n = \bar{g}_n \quad (3)$$

$$\text{ここで} \quad \bar{g}_n = D_x \frac{\partial C}{\partial x} l_x + D_y \frac{\partial C}{\partial y} l_y + D_z \frac{\partial C}{\partial z} l_z \quad (4) \quad n(l_x, l_y, l_z)$$

(1)~(3)を含めた重み付き残差表現式は、

$$\iiint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(D_x \frac{\partial C}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(D_y \frac{\partial C}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(D_z \frac{\partial C}{\partial z}) \right\} C^* d\Omega = \iint_{S_2} (\bar{g}_n - \bar{g}_n) C^* dS - \iint_{S_1} (C - \bar{C}) \bar{g}_n^* dS \quad (5)$$

$$\text{式中 } C^* \text{ は } C^* = 1/4\pi r_0 \sqrt{D_x D_y D_z} \quad (6) \quad r_0 = \sqrt{(x-x_i)^2/D_x + (y-y_i)^2/D_y + (z-z_i)^2/D_z} \quad (7)$$

で表される基本解であり、 $\bar{g}_n^*$ は次式で表される。 $\bar{g}_n^* = \partial C^* / \partial n \quad (8)$

(5)式を Green-Gauss の定理を用いて変形すると

$$C_i + \iint_S C \bar{g}_n^* dS = \iint_S \bar{g}_n C^* dS \quad (9) \quad \text{境界要素法では、一連の手法により(9)式を境界上で定式化して}$$

いく必要がある。特異積分を処理するために(9)式に境界無限操作を施すと

$$k_i C_i + \iint_S C \bar{g}_n^* dS = \iint_S \bar{g}_n C^* dS \quad (10) \quad (10) \text{式は境界積分方程式と呼ばれるものであり、これを離散化後}$$

形成されたマトリックスを解くことで、境界上の解は求まる。領域内部の解は境界上の解を用い(9)式より求まる。

3. 適用モデルと解析結果

モデルの大きさは、大阪湾の南北、東西、水深方向のオーダーを意識して設定したものであり図-2と示した。

領域内の支配方程式、境界条件は次の通りである。

$$\Omega \text{ 内} \quad D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = 0 \quad (11)$$

$$S_1 \text{ 上} \quad C = 0 \quad (ppb) \quad (12)$$

$$S_2 \text{ 上} \quad \bar{g}_n = 50 \quad (mg/m^2 \cdot day) \quad (13)$$

$$\text{その他の境界} \quad \bar{g}_n = 0 \quad (14)$$

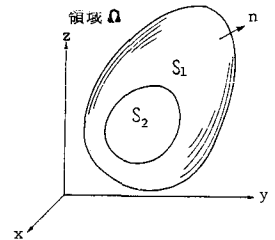


図-1 座標系

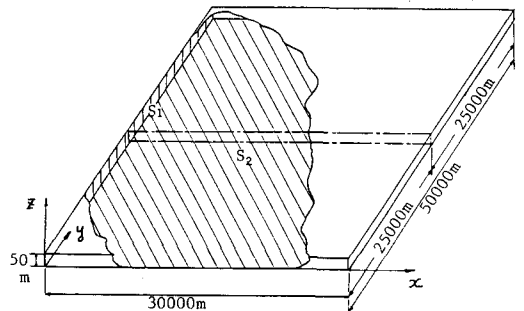


図-2 適用モデル

$$D_x = D_y = 20 \text{ (m}^2/\text{sec)} \quad D_z = 100 \text{ (m}^2/\text{day)}$$

3. 1 理論解 前記モデルの理論解は、(11)式を座標変換し、フーリエ級数展開することにより次式で与えられる。

$$C(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta a R}{\sqrt{D_z D_z (2S+1)^2 \pi^2}} \frac{\cosh \left\{ \frac{(2S+1)\pi}{2a} (z_1 - z) \right\}}{\sinh \left\{ \frac{(2S+1)\pi}{2a} z_1 \right\}} \cdot \sin \frac{(2S+1)\pi x}{2a} \quad (15)$$

‘a’：モデルのx方向の長さ (30 km) R：ふからの溶出流量 $\bar{c}_n$

3. 2 数値積分の影響 境界要素法では積分計算が全体の精度を大きく左右する。特に本研究のように拡散方程式を扱った場合、(6)式のような特性をもつ C^* および G^* を要素上で面積分することが必要となる。この C^* 、 G^* の面積分は、解析的に求めることが困難であるため数値積分を実行するわけだが、負荷点と積分点が同一要素上にない時は別として、負荷点と積分点が同一要素上にあり接近している場合は、負荷点近傍で C^* 、 G^* が急激な値を持ちかきを見せる分布を示すため、数値積分が十分な精度を上げることはできないと懸念される。そのため積分精度を上げるために本研究では、まず要素分割をできるだけ細かくし、要素自体の面積を小さくし、次に C^* 、 G^* の面積分にはその数値積分の次数を上げるという2段階の手法をとった。又、これに関連して内点の計算についても、内点と積分点が接近していると考えられる要素上での C^* 、 G^* の面積分には同様の手法をとった (図-3 参照) 鉛直濃度分布を用いて数値解と理論解との比較を図-4 に示した。数値積分には、Gauss-Legendre の積分公式を用いた。これより、数値積分次数を上げることで数値解は理論解に近付き、上述の手法が妥当であったことが言えよう。しかし、水底と水面付近の濃度をより詳細に求めると図-5 のような分布を示すことがわかる。これは、水面、水底付近においては数値積分が未だ十分な精度を上げていないことによると考えられ、上述のような手法にも限界があることがうかがわれる。一定要素を用い、要素分割数はいずれの場合も830とした。図-6は C^* 、 G^* の面積分に、図-4で一番精度のよかった Gauss-Legendre の100点積分を用いた場合の鉛直断面 $y=25 \text{ km}$ における分布を示したものである。ただし水面、水底に近い内点の値は無視した。

4. おわりに
図-6の結果は誤差1%の精度で理論解と一致しており平面2次元とも考えられるような大水域に小さな厚みを導入したモデルの拡散解析に境界要素法を適用しても実用的に十分な精度が得られるとわかった。今後これをステップとして大阪湾など実際のモデルへの適用が望まれる。参考文献 1) 松葉 順子 他、「境界要素法による開水域の3次元拡散解析」2) C.A. プレビア「境界要素法入門」(昭和58年度文部省科学研究報告書)

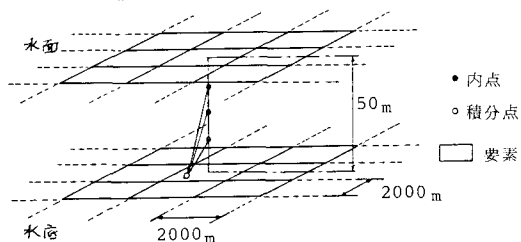


図-3 積分次数を上げた要素

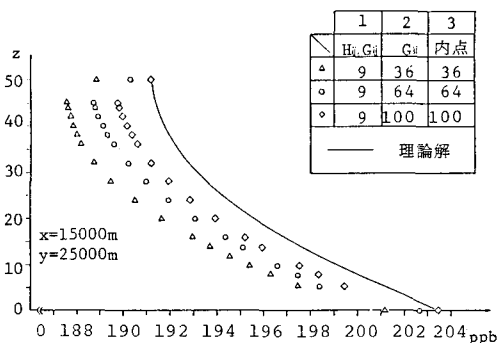


図-4 数値解と理論解の比較

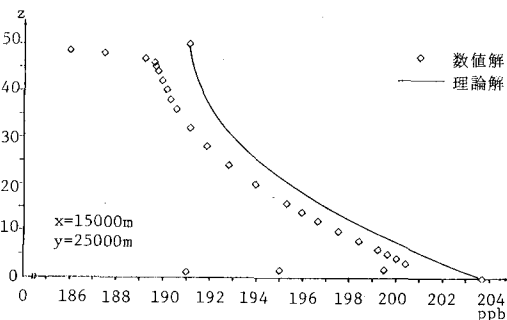


図-5 数値解と理論解の比較 (水面、水底付近を含む)

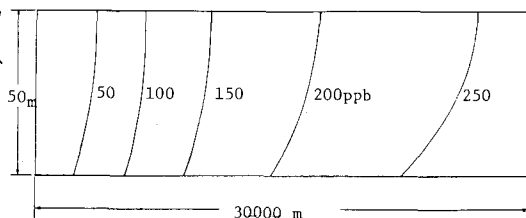


図-6 鉛直等濃度曲線の分布 ($y=25 \text{ km}$)