

九州産業大学 正会員 加納正道

九州産業大学 正会員 赤坂順三

東 和 大学 正会員 空閑幸雄

1. まえがき 前報等^{1), 2)}において二次元移流分散方程式を我々の提案した重み付差分式を用いて、ADI法的解¹⁾、直接二次元重み付差分式解²⁾により従来の差分式やFEMに比べ高精度の解を得られることを報告した。一方、差分法においては、海岸線のような複雑な境界を等格子で差分化すれば差分間隔が小さくなり解析に多大の時間と費用を必要とする。そこで、我々は、複雑な境界付近の差分格子幅を大小変化させて比較的粗い格子で二次元移流分散方程式の重み付差分式解析を試み、本報には、一次元重み付差分式のADI法的解の結果の一部を示している。

2. 不規則境界領域の重み付差分式 文献1)と同様の重み付差分式のADI法的解法の考え方を図1に示す不規則境界領域の移流分散方程式へ応用する。図1の領域を図2、図3に示す差分モデルにより、 γ を不規則境界の格子間隔に応じて与えて、一次元重み付差分式を二回使用して(式2)を二回使用することにもなる)基礎式(1)の解を求める。ここで、不規則境界領域のための不規則格子重み付差分式の定め方を述べよう。式(2)を満足する多項式を x の0, 1, 2, 3, 4, ..., r 次で記せば式(3)が得られる。いま、式(2)において原点を任意の点に移し、差分格子間隔を、 $\Delta x' = \gamma \Delta x = \gamma h$, $\Delta x = h$, $\Delta t = k$ とし、原点のごく

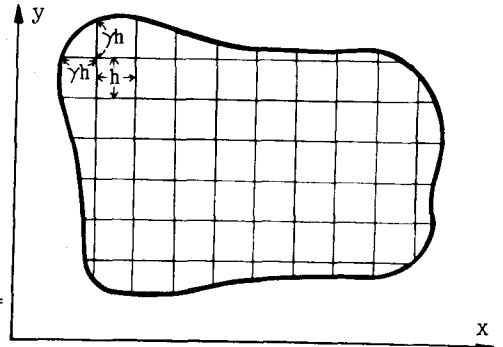


図1 不規則境界領域模式図

近くを考えて、 $x = p \gamma h$ (又は $p h$)、 $t = q k$ とし p , q は0, ± 1 , ± 2 のような大きくない整数、 γ は0と1の間の実数とする。また、 $k = \lambda h^2$ 従って $t = q k = q \lambda h^2$ (本報の $\lambda = 1/4$) とし、さらに流速と拡散係数の無次元化を式(4)のようにすれば式(3)は式(5)と記せる。次に図2、3の差分モデルで示す重み付差分式は式(6)、(7)で表され、同式中の係数すなわち各点の重み $P_{-1}^0 \sim P_1^0$, $Q_{-1}^0 \sim Q_1^0$ は、文献1)と同様の方法によって、連立方程式(8)、(9)を解いて決定できる。すなわち、不規則境界付近の格子間隔の不規則性は式(4)中の無次元流速 F , 無次元拡散係数 μ 中の γ に表され、重み $P_{-1}^0 \sim Q_1^0$ を求める連立方程式(8)、(9)の F , μ に影響を及ぼし結果として重み $P_{-1}^0 \sim Q_1^0$ に関連をもつことになる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + d_2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - v_1 \frac{\partial C}{\partial x} - v_2 \frac{\partial C}{\partial y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - V \frac{\partial C}{\partial x} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} C^{(0)}(x, t) &= 1 \\ C^{(1)}(x, t) &= x - vt \\ C^{(2)}(x, t) &= \frac{(x - vt)^2}{2!} + dt \\ C^{(3)}(x, t) &= \frac{(x - vt)^3}{3!} + (x - vt)dt \\ C^{(4)}(x, t) &= \frac{(x - vt)^4}{4!} + \frac{(x - vt)^2}{2!} dt + \frac{(dt)^2}{2!} \\ C^{(r)}(x, t) &= \sum_{i=0}^{r/2} \left\{ \frac{(x - vt)^{r-2i}}{(r-2i)!} \cdot \frac{(dt)^i}{i!} \right\} \end{aligned} \right\} (3)$$

$$F = \frac{vk}{\gamma h} = \frac{v\lambda h}{\gamma}, \quad \mu = \frac{dk}{\gamma^2 h^2} = \frac{d\lambda}{\gamma^2} \quad (4)$$

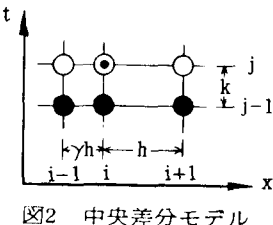


図2 中央差分モデル

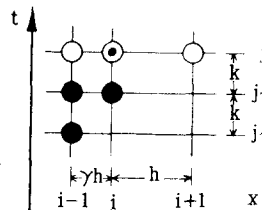


図3 上流差分モデル

●: 既知点, ○: 未知点, ⊙: 求める点

$$C^{(r)}(ph, qk) = h^r \sum_{i=0}^{r/2} \left\{ \frac{(p - qF)^{r-2i}}{(r-2i)!} \cdot \frac{(qu)^i}{i!} \right\} (5)$$

$$\begin{aligned} C(i, j) &= P_{-1}^0 \cdot C(i-1, j) + P_{-1}^{-1} \cdot C(i-1, j-1) \\ &\quad + P_1^0 \cdot C(i, j-1) + P_1^{-1} \cdot C(i+1, j-1) \\ &\quad + P_1^0 \cdot C(i+1, j) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} C(i, j) &= Q_{-1}^0 \cdot C(i-1, j) + Q_{-1}^{-1} \cdot C(i-1, j-1) \\ &\quad + Q_{-1}^{-2} \cdot C(i-1, j-2) \\ &\quad + Q_1^0 \cdot C(i+1, j) \end{aligned} \quad (7)$$

3. 不規則格子重み付差分式解の精度 ここでは、図4に示す対象領域の重み付差分式を、前報¹⁾にも掲げた厳密解式(10)と比較して、その精度を検討する。精度の評価は厳密解との相対誤差 ϵ が格子間隔の4乗(Δx^4)以下となる F と μ の範囲を斜線部分で表して行う。図4左側図において、外周囲格子間隔を変化させた重み付差分式

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & F-1 & F & F+1 & 1 \\ 1 & (F-1)^2-2\mu & F^2-2\mu & (F+1)^2-2\mu & 1 \\ -1 & (F-1)^3 & F^3 & (F+1)^3 & 1 \\ (F-1)^4 & F^4 & (F+1)^4 & & \\ 1 & -12(F-1)^2\mu & -12F^2\mu & -12(F+1)^2\mu & 1 \\ & +12\mu^2 & +12\mu^2 & +12\mu^2 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1^0 \\ P_1^{-1} \\ P_1^{-2} \\ P_1^{-3} \\ P_1^{-4} \\ P_1^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & F-1 & F & 2F-1 & 1 \\ 1 & (F-1)^2-2\mu & F^2-2\mu & (2F-1)^2-4\mu & 1 \\ -1 & (F-1)^3 & F^3 & (2F-1)^3 & 1 \\ (F-1)^4 & F^4 & (2F-1)^4 & & \\ 1 & -12(F-1)^2\mu & -12F^2\mu & -24(2F-1)^2\mu & 1 \\ & +12\mu^2 & +12\mu^2 & +48\mu^2 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1^0 \\ Q_1^{-1} \\ Q_1^{-2} \\ Q_1^{-3} \\ Q_1^{-4} \\ Q_1^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$C(x,y,t) = \text{EXP}((-x+v_1t)/\sqrt{d_1} + (-y+v_2t)/\sqrt{d_2} + 2t) \quad (10)$$

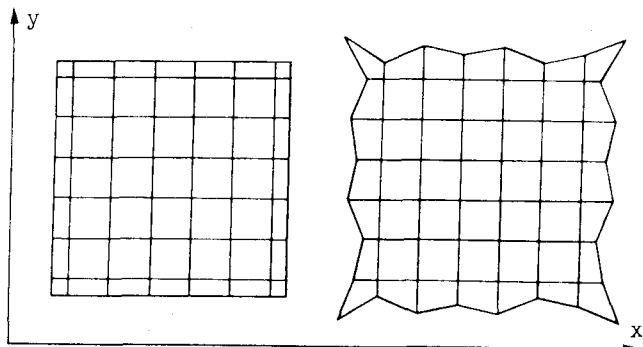
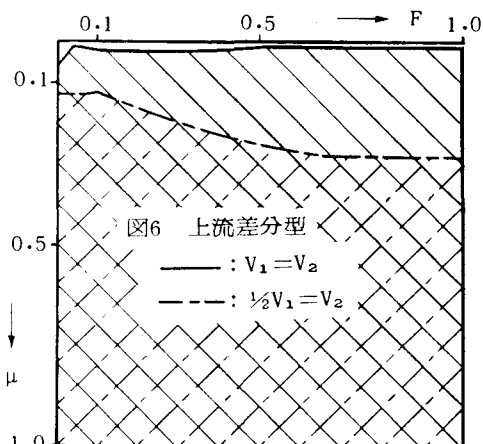
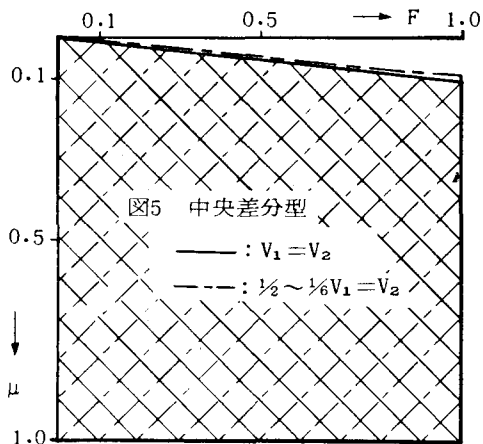


図4 対象領域



参考 1) 加納・空閑・赤坂：二次元移流分散方程式のADI法による高精度差分、第39回年講2部
文献 2) 加納・空閑・赤坂：二次元移流分散方程式の重み付差分式による数値解、昭和59年西部支部年講