

京都大学大学院 学生員 伊藤 邦展

京都大学工学部 正員 岩佐 美朗

広島大学工学部 正員 細田 尚

1. 序論; 本研究は、濃度変動場の解析を $\overline{C^2}$ - ϵ_c 方程式を用いて行い、開水路流れの乱流拡散実験よりその妥当性と検討したものである。

2. 一様乱流場での $\overline{C^2}$ - ϵ_c 方程式の特性; 一様等方性乱流場では、Kármán-Howarth 方程式と同様に濃度の空間相関が次式によって規定される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{C^2} R_{cc}(r, t) - 2 \overline{C^2} \sqrt{u^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 k_c(r, t)] = 2 k C \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \frac{\partial R_{cc}(r, t)}{\partial r}] \quad (1)$$

ここに、 $R_{cc}(r, t)$; 濃度の空間相関係数、 k_c ; 濃度と流速の三重相関係数、 $\overline{C^2}$; 濃度の変動強度、 $\sqrt{u^2}$; 乱れ強度 k ; 分子拡散係数、 t ; 時間、 r ; 相関をとる2点間の距離

いま、 r として空間座標 (x_1, x_2, x_3) のうち x_1 をとると、濃度変動の一次元波数スペクトル $E_c(k, t)$ は、乱れ速度と同様に次式で表わされる慣性領域が存在する。⁽¹⁾

$$E_c(k, t) = \frac{3}{5} A_c \epsilon_c(t) \epsilon(t)^{-1/2} k^{-5/2} \quad (A_c \text{は定数}) \quad (2)$$

これは長さのスケールを $L = \sqrt{\frac{\overline{C^2}}{\epsilon_c}} \epsilon$ としたとき、 $R_{cc}(r, t)$ が r/L で普遍関数表示されることを示している。(1)式を r に関して0から ∞ まで積分する。このとき、Kármán-Howarth 方程式の場合と同様に右辺は無視される。無次元変数 $r' = r/L$ を用いると、 r' に関する積分は定数と考えられるから、一つにまとめ

$$\frac{d}{dt} (\overline{C^2} L) = C_c \overline{C^2} \sqrt{k} \quad (3)$$

表-1 ϵ_c 方程式の散逸項の表示

L	$\sqrt{\frac{\overline{C^2}}{\epsilon_c}} \epsilon$	$\sqrt{k} \frac{\overline{C^2}}{\epsilon_c}$
$\frac{d\epsilon_c}{dt}$	$-\frac{5}{3} \frac{\epsilon_c^2}{L^2} - \frac{1}{3} C_{e2} \frac{\epsilon_c}{k} - \frac{2}{3} C_c \frac{\epsilon_c^{5/2} k^{1/2}}{\overline{C^2}^{3/2} \epsilon^{1/2}}$	$-(2 + C_c) \frac{\epsilon_c^2}{L^2} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_c}{k} \epsilon_c$
C_c	$-\frac{\sqrt{\overline{C^2}(\sigma+1)}}{(r+1)^2}$	$\frac{-\overline{C^2}}{r+1}$

となる。 L に $\sqrt{\frac{\overline{C^2}}{\epsilon_c}} \epsilon$ を代入し、次式を得る。

$$\frac{d\epsilon_c}{dt} = -\frac{5}{3} \frac{\epsilon_c^2}{L^2} - \frac{1}{3} C_{e2} \frac{\epsilon_c}{k} - \frac{2}{3} C_c \frac{\epsilon_c^{5/2} k^{1/2}}{\overline{C^2}^{3/2} \epsilon^{1/2}} \quad (4)$$

ここで、定義式(5)式と一様乱流場での k - ϵ モデル(6)(7)式を用いている。

$$\frac{d\overline{C^2}}{dt} = -\epsilon_c \quad (5) \quad \frac{dk}{dt} = -\epsilon \quad (6) \quad \frac{d\epsilon}{dt} = -C_{e2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (7)$$

上記4式が一様乱流場での基礎式である。(6)(7)式はある程度以上時間が経過すると、 Λ^* 乗解に従う。不変量

$\Lambda = k \int_0^\infty r^\sigma f n dr$ (f ; 二重速度縦相関)を用いると、 Λ^* 乗解の領域では、 $C_{e2} = (3\sigma+5)/(2\sigma+2)$,

$\epsilon/k = (2\sigma+2)/\{(\sigma+3)t \}$ となり、⁽²⁾ (5)式は、

$$\frac{d^2 \overline{C^2}}{dt^2} = -\frac{5}{3} \frac{1}{\overline{C^2}} \left(\frac{d\overline{C^2}}{dt} \right)^2 + \frac{C_{e2}}{3} \frac{2\sigma+2}{\sigma+3} \frac{1}{t} \frac{d\overline{C^2}}{dt} - \frac{2}{3} C_c \frac{1}{\overline{C^2}^{3/2}} \left(-\frac{d\overline{C^2}}{dt} \right)^{3/2} \frac{\sigma+3}{2\sigma+2} \sqrt{t} = 0 \quad (8)$$

となる。上式は、濃度の空間相関係数 $\overline{C^2} R_{cc}(r, t)$ の積分量が不変の仮定

$$\int_0^\infty \overline{C^2} R_{cc}(r, t) r^\sigma dr = \overline{C^2} L^{\sigma+1} \int_0^\infty R_{cc}(r') r'^\sigma dr' = \text{const} \quad (9)$$

と連立することにより、 $\overline{C^2}$ - ϵ_c 方程式の定数 C_c が表-1に示したように表わせる。 $\sigma = \sigma$ とすれば $C_c = -\sqrt{r^2/(\sigma+1)^2}$ となり C_c は-1と0の間にある。表-1には参考のために $L = \sqrt{k} \frac{\overline{C^2}}{\epsilon_c}$ としたときの結果も示した。 $L = \sqrt{k} \frac{\overline{C^2}}{\epsilon_c}$ の結果は Newman, Launder, Lumley⁽³⁾の結果と一致している。

3. 実験の概要：一様長方形断面水路において、水路上流部の1/2水深の位置に連続点源を設け、比重を1.0に調整した食塩水を投入し、下流での濃度分布を導電率計により測定した。記録はデータレコーダーを用い、後に、

A-D変換により変動強度、スペクトルを求めた。スペクトル

はFFT法により求めた。実験の水理諸量を表-2に示す。水路の座標系は、流下方向にx、水路幅方向にzとした。

4. 実験結果と解析結果の比較：水深方向に濃度分布が一樣となる領域を平面流れとみなし、濃度の総量から連続源の放出量を逆算して与えることにより、平面流れの解析結果と実験結果と比較した。なお E_c -方程式の散逸項は前述の結果を用いた。生成項の表示としては $C_{ec} \frac{E_c}{L} D_z (\frac{\partial C}{\partial z})^2$, $C_{ec} \frac{E_c}{L} D_z (\frac{\partial C}{\partial z})^2$ の二通りを考えた。解析にあたり、次の無次元量を導入した。

$$\chi' = \frac{xU}{D_z}, z' = \frac{zU}{D_z}, C' = \frac{C}{C_0}, \bar{C}^2 = \frac{\bar{C}^2}{C_0^2}, E_c' = \frac{E_c}{C_0}$$

上記無次元量を用い基礎式を無次元化した。

$$\frac{\partial C}{\partial \chi} = \frac{\partial C}{\partial z^2} \quad (10) \quad \left[\text{以後、無次元量の'} \text{と} \right]$$

$$\frac{\partial \bar{C}^2}{\partial \chi} = \frac{2}{\alpha} \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{C}^2}{\partial z} \right) - \beta E_c \quad (11)$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \chi} = \left[C_{ec} \frac{E_c}{L} \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)^2, \frac{C_{ec} \gamma}{\alpha \beta} \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial E_c}{\partial z} \right) - \frac{5}{3} \beta \frac{E_c}{C_0^2} - \frac{C_{ec} \gamma E_c}{3} - \frac{2}{3} C_0 \beta^{\frac{1}{2}} C_0^{\frac{1}{2}} E_c^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

ここに、 α, β, γ は次のように定義される無次元パラメータである。

$$\alpha = \bar{C}^2 / C_0^2, \beta = D_z E_c / U^2 \bar{C}^2, \gamma = D_z E_c / U^2 k$$

定数 C_{ec} は1.92、 C_0 は0.5とし、 α, β, γ はそれぞれ $10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-3}$ とした。 C_{ec} は

未知なので変化させた。得られた濃度分布図を図-1に示す。連続源

の放出量の与え方が妥当であったことが確認される。濃度変動分布図を図-2に示す。実験結果より、濃度変動は

x方向に一度極大値をとって、のち減衰するが、 E_c -方程式の生成項を $C_{ec} \frac{E_c}{L} D_z (\frac{\partial C}{\partial z})^2$ とした(a)は、そのような分布形を示さず、また定量的にも一致しない。生成項を

$C_{ec} \frac{E_c}{L} D_z (\frac{\partial C}{\partial z})^2$ とした(b)は定性的にも定量的にもよい一致を示している。従って生成項の表示としては、後者の方が妥当であるといえよう。後者の場合の濃度変動のx方向

の減衰を図-3に示す。実験結果はほぼ-2乗のべきで減衰する

のに対し、解析結果はもう少し大きいべきで減衰している。た

だし、 $\bar{C}^2$ の値を求める際に濃度分布の実験結果から $C_0=0.2$ と

した。断面中央の奥の流下に伴うスペクトルの変化を図-4に示

した。スペクトルの大きさは、流下に伴って減少し、いずれの

スペクトルも-5/3乗則に従っている。

参考文献 1) Hinze, J.O ; Turbulence, McGraw-Hill 1959

2) 岩佐・糸越・細田 ; 京大防災年報 27 B-2 3) Newman,

Lauder, Lumley ; J.F.M. Vol. 111

表-2 実験の水理諸量

	Width B (cm)	Depth h (cm)	Mean Velocity u_m (cm/s)	Shear Velocity u_s (cm/s)	Aspect Ratio B/h	Slope 1/500	Froude number	Reynolds Number
Exp. 1	25.0	2.09	31.06	1.87	11.96	1/500	0.69	6130

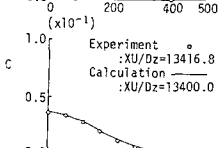
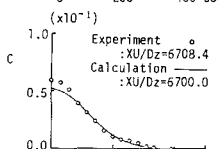
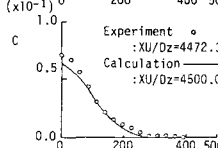
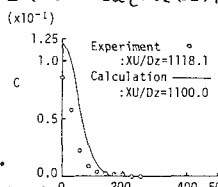


図-1 濃度分布

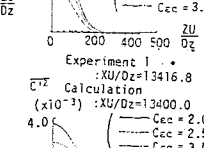
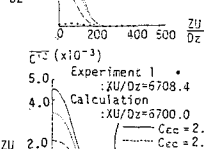
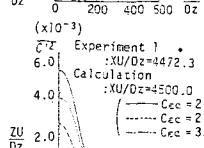
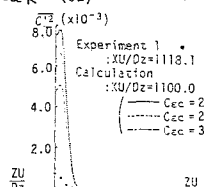


図-2(a) 濃度変動分布

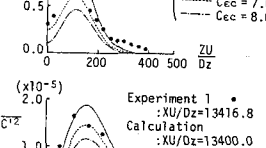
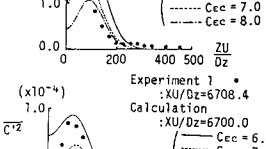
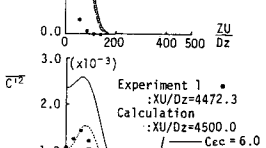
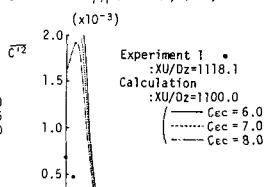


図-2(b) 濃度変動分布

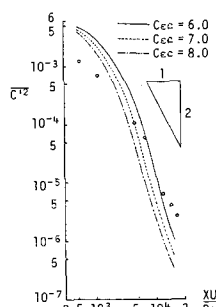


図-3 $\bar{C}^2$ の減衰

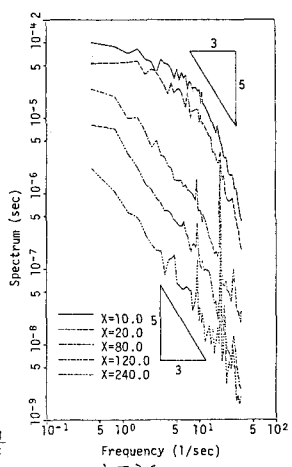


図-4 流下方向のスペクトル