

室蘭工業大学 学生員 高 島 英博
同 上 正会員 藤 間 聡
三井建設(株) 岡 田 康 広

1. まえがき

均一多孔体における縦方向分散係数は、既往の研究結果から構成材料固有の分散率と浸透流速との積で表されることが知られている。しかし、実際の不均一帯水層の分散過程にこの分散係数を適用した場合、実測値と著しくかけ離れた結果を得ることが多い。本報は、簡単化した成層帯水層モデルを考え、モーメント法を適用して不均一多孔体の分散率、浸透流速と縦方向分散係数との基本的関係について考察を試みるものである。

2. 成層多孔体における分散過程の定式化

2-1. 平均濃度分布 保存系溶解物質（以後トレーサと称す。）の分散過程は次式で表される。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = K_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} (K_2 \frac{\partial c}{\partial z}) \quad \dots (1)$$

ここに、 c ；トレーサ濃度、 V ；浸透流速、 K_1 ；縦方向分散係数、 K_2 ；横方向分散係数、 x ；主流方向の座標、 y ， z ；主流に直角方向の座標、 t ；時間をそれぞれ示す。

(1) 式の取り扱いを容易にするため、変数変換を行い無次元化する。但し、 y 方向の分散は無視できるものとして二次元解析とする。

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + a \chi \frac{\partial C}{\partial \xi} = \psi_1 \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\psi_2 \frac{\partial C}{\partial \zeta}) \quad \dots (2)$$

$$\tau = \frac{K_2}{h^2} t, \quad \xi = \sqrt{K_2/K_1} \frac{1}{h} (x - Vt), \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad a = \frac{h\bar{V}}{\sqrt{K_1 K_2}}, \quad \chi = \frac{V - \bar{V}}{\bar{V}}, \quad \psi_1 = \frac{K_1}{K_1}, \quad \psi_2 = \frac{K_2}{K_2}, \quad C = \sqrt{K_1/K_2} \frac{hc}{c_0}$$

ここに、 h ；全層厚、 c_0 ；トレーサ初期濃度、 $\bar{V}$ ；全層にわたる平均値をそれぞれ示す。

上記(2)式の解を求めることは、トレーサを瞬間放出とした場合応答関数である濃度の確率密度関数を求めることに帰着する。従って、本報では計算過程が容易なモーメント法を用いてこの確率密度関数を推定する。確率密度関数 $C(\xi)$ をフーリエ変換して次式で定義される特性関数を導入する。

$$\phi(r) = E(e^{ir\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ir\xi} C(\xi) d\xi \quad \dots (3)$$

上式の指数関数を級数に展開し、フーリエ逆変換すると平均濃度の確率密度関数は次式で与えられる。

$$C(\xi) = \frac{\exp(-\xi^2/2\sigma^2)}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left\{ 1 + \frac{\lambda_3}{6} \text{He}_3\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) + \frac{\lambda_4}{24} \text{He}_4\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) + \dots \right\} \quad \dots (4)$$

ここに、 σ^2 ；分散、 λ_i ； i 次キュムラント、 $\text{He}(\cdot)$ ；エルミート多項式を示す。

2-2. 平均濃度位置 次に平均濃度の位置を濃度の一次モーメント C_1 を適用して求める。

$$\frac{\partial C_1}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta} (\psi_2 \frac{\partial C_1}{\partial \zeta}) + a \chi, \quad C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \xi C d\xi \quad \dots (5)$$

上式を図-1に示す多孔体モデルの境界条件と多孔体内の初期濃度を0とした初期条件のもとで解く。解は定常解と過渡解に分離して示されるが、この場合過渡解に関しては解析解は存在しないので定常解のみ示す。

$$\text{定常解;} \quad C_1/a = -\frac{9\eta^2 + 11\eta}{324(1-\eta^2)} + \frac{\eta\zeta^2}{2(1-\eta)} \quad (0 \leq \zeta \leq 1/3) \quad \dots (6)$$

$$C_1/a = -\frac{9\eta^2 + 11\eta}{324(1-\eta^2)} + \frac{\eta}{18(1-\eta)} - \frac{\eta}{1+\eta} \left(\frac{\zeta^2}{2} - \frac{\zeta}{9} + 1 \right) \quad (1/3 \leq \zeta \leq 1/2), \quad \eta = \pm(ki/\bar{k}-1) \quad \dots (7)$$

ここに、 ki ； i 層の透水係数、 $\bar{k}$ ；全層にわたる平均透水係数を示す。

2-3. 分散係数 分散過程の初期及び長時間経過して移流の寄与が無視できる定常状態における各縦方向分散係数をここで導く。縦方向分散係数はトレーサ濃度の主流方向の分散の時間微分として次式で与えられる。

$$\bar{K}_{\infty} = \frac{1}{2} \frac{d\sigma^2}{dt} = \alpha \bar{V} + \alpha \bar{V} a \int_0^1 \chi C_1 d\zeta = \bar{K}_1 + \bar{K}_1 a \int_0^1 \chi C_1 d\zeta \quad \dots (8)$$

ここに、 σ^2 ；トレーサ濃度の分散、 α ；構成材料の分散率(dispersivity)を示す。上式の右辺第一項は構成材料が寄与する分散に基づく縦方向分散係数であり、第二項は層が寄与する分散による縦方向分散係数である。

分散過程の初期状態においては移流が卓越し、定常期では分散が卓越することを考慮して、(5) 式を解くと各状態での分散係数は以下のように表される。

分散過程初期；

$$\bar{K}_0 = \bar{K}_1 + \bar{V}^2 \eta^2 t \quad \dots (9)$$

分散過程定常期；

$$\bar{K}_{\infty} = \bar{K}_1 + \frac{\bar{V}^2 h^2}{\bar{K}_2} \frac{3\eta^3 + 5\eta^2}{243(1-\eta^2)} \quad \dots (10)$$

3. 結果および考察

本報における成層多孔体として、図-1に示す水平三層多孔体モデルを考える。このモデルは上、下面とも不浸透面の被圧状態で、第一、三層の幾何・水理学諸元は層厚 $h=10.0\text{cm}$ 、平均粒径 $d=0.35\text{mm}$ 、透水係数 $k_1=0.11\text{cm/s}$ 第二層は $h=10.0\text{cm}$ 、 $d=0.80\text{mm}$ 、 $k_2=0.37\text{cm/s}$ 、動水勾配 $i=0.0714$ である。上記の条件で定常分散係数を求めると、 $\bar{K}_{\infty}=0.0015+6.8320=6.8335 \text{ (cm}^2/\text{s)}$ $\dots (11)$

となる。なお、右辺第一項は第一、二層のみからなる均一多孔体での分散実験から最適同定した縦方向分散係数と浸透流速から得られた値で、図-2に実測値と最適同定値とを示している。この結果、分散率は分散過程初期においては構成粒径に比例した値を有するが、定常期では成層スケールの不均一性により分散率は著しく増大する。図-3は平均濃度の位置を無次元時間 $\tau=0 \sim \infty$ 間に関して(5) 式から求めたものである。但し、過渡解は解析解が存在しないため、数値解析によった。同図から高速域の第二層においては、平均濃度の位置は鉛直方向にはば一定であるが、低速域の第一層においては高速域に影響され放物線型を呈する。平均流速 $\bar{V}$ で濃度が伝播する位置は一層の $3/4, \zeta=0.2521$ であることがわかる。

以上の結果を物理面に模式的に表わしたものが図-4である。この図から定常分散係数 $6.8320 \text{ cm}^2/\text{s}$ は平均濃度位置と平均移動距離 $\bar{V}t$ との分散に基づくもので、一方、構成材料固有の分散係数 $0.0015 \text{ cm}^2/\text{s}$ は任意点におけるトレーサ自身の拡がりを表すものと考えられる。

4. むすび 成層モデルを用いて不均一材料の縦方向分散係数を推定する方法を示した。しかし、自然帯水層に適用するには今後更に検討を加える必要がある。

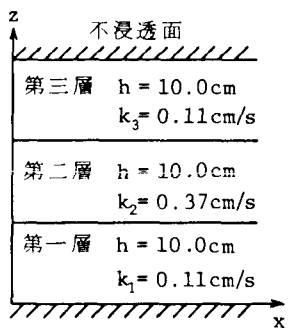


図-1 成層多孔体モデル

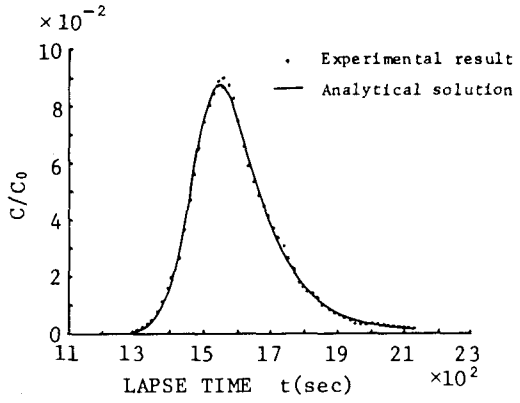


図-2 実測濃度と最適同定濃度

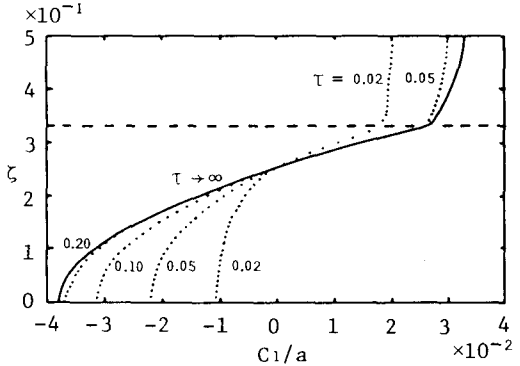


図-3 平均濃度の位置

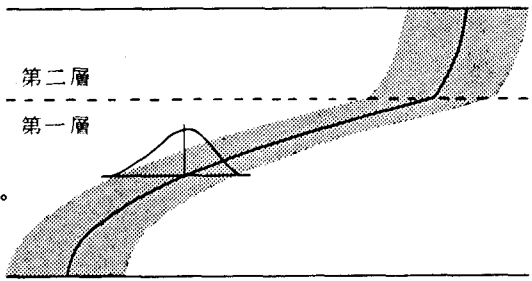


図-4 成層多孔体内の濃度分布