

京都大学 正員 米田 総
京都大学 正員 井上 頼輝

1. はじめに 最近、透水量係数の空間分布を水位などのデータから推定する逆問題、あるいは透水量係数などの空間分布の統計的構造や推定精度を考慮して、確率論的に水位場や濃度場を予測する方法などに関する研究が多く行われるようになってきた。本研究はこれらの方法の一つとして、多変量正規分布の条件付分布に関する性質を用いて、いくつかの水位と透水量係数のデータから、透水量係数の空間分布を推定し、同時に得られる透水量係数の共分散行列を用いて、推定精度、観測データの位置と値を考慮して行うシミュレーション(Conditional Simulation)²⁾を行い、これを濃度場予測に用いたときの有効性について検討する。

2. 基礎式 水位場計算のための基礎式としてHoeksemaらと同様、³⁾次式を用いる。

$$\partial^2 Y / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 Y / \partial y^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2 = 0 \quad (1)$$

ただし、 $Y = h_T$ (T は透水量係数)、 ϕ は水位である。

今、 ϕ と Y とを次式のように期待値と変動項とに分離して考える。

$$\phi = H + h, \quad Y = F + f \quad (2)$$

H : 水位の期待値、 h : 水位の変動項、 F : Y の期待値、 f : Y の変動項
このとき、(2)式の ϕ と Y を(1)式に代入し、変動項の2次以上の項を無視することにより次式が導かれる。

$$\partial^2 h / \partial x^2 + \partial^2 h / \partial y^2 = -\partial f / \partial x \cdot \partial H / \partial x - \partial f / \partial y \cdot \partial H / \partial y \quad (3)$$

(3)式をGalerkin有限要素法で定式化すると次式が得られる。

$$[A]\{h\} = [B]\{f\} + [C]\{h_B\} \quad (4)$$

ここに $[A]$ 、 $[B]$ 、 $[C]$ は既知の係数行列、 $\{h\}$ は境界を除く節点についての h の節点値ベクトル、 $\{f\}$ は f の節点値ベクトル、 $\{h_B\}$ は境界上の h の節点値ベクトルである。

3. 多変量正規分布法による推定とConditional Simulation T は対数正規分布することが知られており、したがって f は正規分布することになる。このとき水位の境界条件を既知とすると、(4)式は $\{h\} = [A]^{-1}[B]\{f\}$ となり、 h も正規分布となる。 $\{f\}$ が期待値 $\{0\}$ ($\{0\}$ は零ベクトル)、共分散行列 Σ_f の正規分布 $N(\{0\}, \Sigma_f)$ すると仮定すると、 $\{f\}$ と $\{h\}$ を続けて並べたベクトル $\{w\} = (\{f\}^T, \{h\}^T)^T$ (添字 T は転置することを意味する。)は $N(\{0\}, \Sigma_w)$ となる。ここで $\{w\}$ の共分散行列 Σ_w は $[D] = [A]^{-1}[B]$ として、次式となる。

$$\Sigma_w = \begin{bmatrix} \Sigma_f & \Sigma_f[B]^T \\ [D]\Sigma_f & [D]\Sigma_f[B]^T \end{bmatrix} \quad (5)$$

今、 $\{f\}$ と $\{h\}$ のいくつかの要素が観測されて既知になったとして、 $\{w\}$ を並べかえて $\{w\} = (\{w_1\}^T, \{w_2\}^T)^T$ と分割する。ここに $\{w_1\}$ は既知の節点値ベクトル、 $\{w_2\}$ は未知の節点値ベクトルである。また、この分割に対応して Σ_w も次式のように分割して考える。

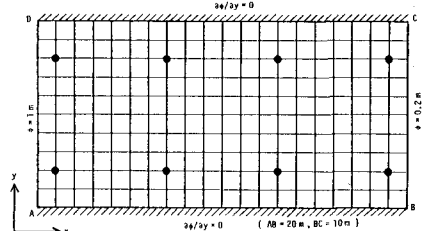


図1. 解析領域と境界条件

表1. 濃度場の計算条件

基礎式
$\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (D_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} + D_{xy} \frac{\partial C}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (D_{yx} \frac{\partial C}{\partial x} + D_{yy} \frac{\partial C}{\partial y}) + V_x \frac{\partial C}{\partial x} + V_y \frac{\partial C}{\partial y} = 0$
$D_{xx} = \alpha_x V_x^2 / \nu + \alpha_y V_y^2 / \nu + D_0, D_{yy} = \alpha_x V_x^2 / \nu + \alpha_y V_y^2 / \nu + D_0$
$D_{xy} = D_{yx} = (\alpha_x - \alpha_y) V_x V_y / \nu, \nu = f V^2 + V_0^2$
(V_x, V_y)は同濃度流速, $\alpha_x = 0.5m, \alpha_y = 0.15m, D_0 = 1 \times 10^{-9} m^2/sec$
同濃度 $\theta = 0.35$ (一定), C は濃度+濃度
初期条件: 全領域で $C = 0$, 境界条件: 上流端AD上で $C = 1$, 他は初期条件: 全領域で $C = 0$, 境界条件: $\partial C / \partial x = 0$ (右は法線ベクトル)

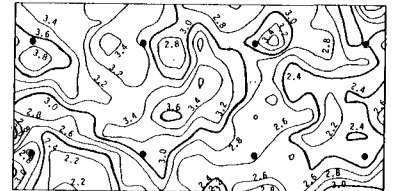


図2. 仮定したY場(これを真のY場とみなす)

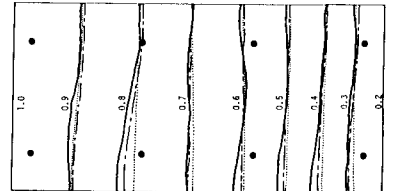


図3. 仮定した力場(実線)と濃度の推定値

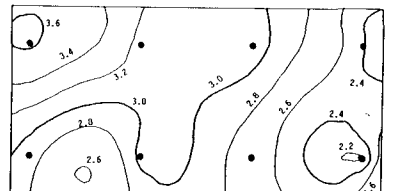


図4. Y場の推定値(観測データYとφ)

$$\Sigma_w = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (6)$$

このとき $\{w_i\}$ の $\{w_j\}$ を与えられたときの条件付分布は次のようになる。

$$N(\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\{w_i\}, \Sigma_{22.1}) \quad (\Sigma_{22.1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}) \quad (7)$$

よ、 $\{f_i\}$ と $\{x_i\}$ の未知節点値の条件付期待値は $\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\{w_i\}$ 、条件付共分散行列は $\Sigma_{22.1}$ で与えられる。

Conditional Simulationを行うには $\{w_i\}$ の条件付分布(7)から f_i の未知節点値ベクトル $[f_u]$ のみの期待値 $E[f_u]$ と共分散行列 Σ_{f_u} を求め、米田ら²⁾、Cliftonら¹⁾により、用いられた方法を用いる。すなわち $[f_u]$ と同じ統計的性質を持つ乱数ベクトル $[f_{cs}]$ を次式で発生する。

$$\{f_{cs}\} = E[f_u] + [R]\{E\} \quad (\Sigma_{f_u} = [R][R]^T, \{E\} \text{は白色標準正規乱数ベクトル}) \quad (8)$$

4. 解析条件 図1に解析領域と境界条件、有限要素への分割を示す。 Y の統計的性質としては、 Y_i を Y の第 i 節点値として、次のように仮定する。

$$E[Y] = 3, \text{Cov}(Y_i, Y_j) = \sigma_Y^2 \exp[-r_{ij}/\lambda], \sigma_Y = 0.5, \lambda = 5m \quad (9)$$

ただし、 $\text{Cov}(Y_i, Y_j)$ は Y_i と Y_j の共分散、 r_{ij} は節点 i と j の距離である。図1の黒丸で示す点で透水量係数と水位のデータが得られると仮定する。

Conditional Simulationでは(8)式で発生した f_{cs} に F を加えて Y 場を構成し、(1)式をGalerkin有限要素法で定式化して ϕ を求める。本研究では300個の Y 場を構成し、 ϕ の統計的性質を求める。また濃度場の計算については、Conditional Simulationにより求めた Y 場を用いて流れ場を計算し、移流分散方程式をGalerkin有限要素法で定式化して濃度 C 場を求める。基礎式、初期条件、境界条件を表1に示す。

5. 計算結果および考察 図2に仮定した Y 場、図3の実線で図2の Y 場を用いて求めた ϕ 場を示す。黒丸は Y と ϕ の観測地点である。図4に Y と ϕ の観測データを用いて得た Y 場の推定値(条件付期待値)、図5に Y の推定標準偏差(条件付標準偏差)、図3の一点鎖線でConditional Simulationにより、得た ϕ 場の期待値、図6に ϕ の標準偏差を示す。比較のために Y の観測データのみを用いて求めた Y 場の推定値を図7、 ϕ 場の期待値を図3の点線、 Y と ϕ の標準偏差をそれぞれ図8、図9に示す。 ϕ の観測データを考慮することにより、 Y 場、 ϕ 場の推定値は仮定した場に近づき、 Y 場、 ϕ 場の推定標準偏差が小さくなることわかる。しかし(1)式から(3)式を求めるときの近似のため、 ϕ の観測データを用いても、観測点における ϕ の推定値は観測データに一致せず、また ϕ の標準偏差は0になっていない。これを改善することは今後の課題である。

Conditional Simulationにより得た6日後の濃度場について下流端BC上の最大濃度節点値の度数分布を求めること図10になる。 Y と ϕ の観測データより求めた Y 場の推定値(図4)について濃度場を求めると、最大濃度節点値は0.11となるが、このときにも、最大濃度節点値が0.50以上である可能性が約1(%)あることが図10よりわかる。地下水汚染予測を行うときは、このように濃度値の確率分布を求めることが有効であると考える。

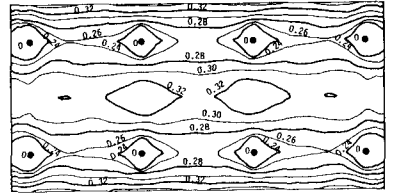


図5. Y の推定標準偏差(観測データ Y と ϕ)

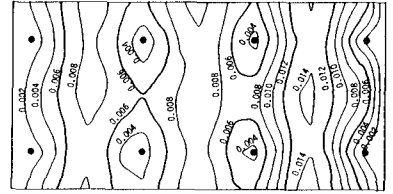


図6. ϕ の推定標準偏差(観測データ Y と ϕ)

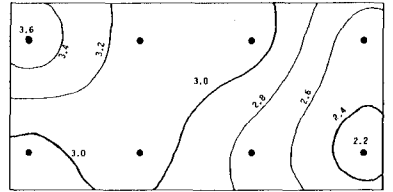


図7. Y 場の推定値(観測データ Y のみ)

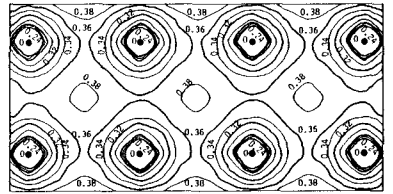


図8. Y の推定標準偏差(観測データ Y のみ)

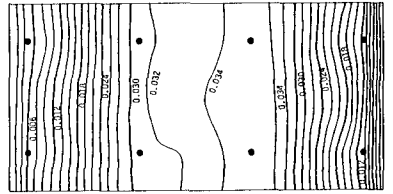


図9. ϕ の推定標準偏差(観測データ Y のみ)

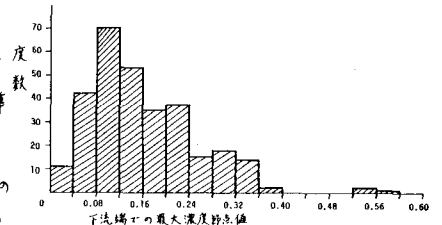


図10. 下流端最大濃度節点値の度数分布

参考文献

- 1) Clifton P.M. et al., Water Resour. Res., vol.18, No.4, pp.1215-1224, 1982
- 2) 米田, 古市, 井上, 衛生工学研究論文集, 19巻, pp.50-59, 1993
- 3) Hoeksema R.J. et al., Water-Resour. Res., vol.20, No.7, pp.1003-1010, 1984