II-52　　DDCルール・カーブの Chance Constraint Model表示

山梨大学工学部　正会員　竹内邦良

1．はじめに

DDCルール・カーブは、渇水持続曲線を用いた給水用貯水池の操作ルールである 1,2)。このとき用いられる規準は貯水池の涸渇確率を貯水量のいかんにかかわらず一定に保つということである。貯水量に関する制約を確率的に与えるモデルは一般に Chance Constraint Modelと呼ばれる。

Chance Constraint Model をはじめて貯水池計画に応用したのは ReVelleらであったが 3)、これまでのところこのモデルは Linear Decision Rule (LDR) を前提として検討されて来ており、適当な操作方法を考慮して貯水池の最適設計をすることに目的がある。一方DDCルール・カーブは既設貯水池において、与えられた水需要パターンの下での real time operationを問題とするものである。したがって LDRを前提としたモデル展開は出来ない。以下はDDCルール・カーブのChance Constraint Model 表示と、その解、およびそれに関連した各条件・仮定の検討である。

2．DDCルール・カーブの Chance Constraint Model表示

τ時点で貯水量がVであるときの給水制限率$\alpha_\tau(V)$ は、以下のような最小値問題の解として表わすことができる。

$$\min \alpha_\tau(V) \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} R_{\tau+m-1} = (1-\alpha_\tau(V))\cdot D_{\tau+m-1} & m=1,\cdots,N_s \quad (2)\\ Prob(S_{\tau+m}\le 0) \le \beta_{\tau+m} & m=1,\cdots,N_s \quad (3)\\ S_\tau = V & \quad (4)\\ S_{\tau+m} = S_{\tau+m-1} + I_{\tau+m-1} - R_{\tau+m-1} & m=1,\cdots,N_s \quad (5)\end{cases}$$

ここにD_t ：水需要パターン、τ：現時点、V：現時点τでの貯水量、$\beta_{\tau+m}$：現時点τより m日後の貯水池の許容涸渇確率、N_s ：τ時点での操作に考慮する将来期間長、$D_{\tau+m}$、$R_{\tau+m}$、$S_{\tau+m}$：τ時点から第 m日目のそれぞれ水需要、放流量、日初貯水量である。

目標関数(1) は給水制限率を最小にするということである。但し制約条件として、(2)将来にわたって同一制限率を続けた場合に、(3) m 日後に貯水池が空になる確率が与えられた水準$\beta_{\tau+m}$以下にならなければならない。この表示が LDRと基本的に異なる点は、(2) を(5) に代入しても右辺のSを消去することができないところにある。 LDRでは、操作ルール (2)が $R_{\tau+m-1}=S_{\tau+m-1}-b$という形式になっていたため、$S_{\tau+m}$が$I_{\tau+m-1}$と$R_{\tau+m-1}$のみの関数に簡略化される。しかしながら real time operationのための操作ルールとしては、このように単純な形式は許されない。この意味で LDRのルールは、モデルの数学的取り扱い易さのために、操作ルールの現実性を無視した結果になっている。

(3) に示されるように、貯水池の許容涸渇確率βが、τ時点からの時間距離 mによって変化するのは、τ時点から数週間後に涸渇するのと、半年後に涸渇するのでは無差別選好曲線を描けば、許容確率は自から異なることを考慮したものである。この$\beta_{\tau+m}$では涸渇に至る時間距離のみならず、涸渇時点での水需要の季節的特殊性も考慮されることになる。

3．ＤＤＣルール・カーブの Chance Constraint Model解

(1)～ (5)は容易に解けて、ＤＤＣルール・カーブ$\alpha_\tau(V)$ は (6)のように得られる。

$$\alpha_\tau(V) = \max_{m=1,\cdots,N_S} \frac{\sum_{\nu=0}^{m-1} D_{\tau+\nu} - V - \left(\sum_{\nu=0}^{m-1} I_{\tau+\nu}\right)_{\beta_{\tau+m}}}{\sum_{\nu=0}^{m-1} D_{\tau+\nu}} \tag{6}$$

ここに右辺分子の第３項は、確率変数$\Sigma I_{\tau+\nu}$の確率$\beta_{\tau+m}$に相当する deterministic equivalence（等価確定量）である。この等価確定量に、季節別渇水持続曲線 (7)を (8)、(9) に従って用いるのがＤＤＣルール・カーブの基本方針である。

$$f_k(m|\tau) = \underset{j=1,\cdots,N}{k\text{-th smallest}} \cdot \min_{(\tau-s,j)\leq t_1 \leq (\tau+s,j)} \frac{1}{m} \sum_{t=t_1}^{t_1+m-1} I_t \tag{7}$$

$$T_k = \frac{N+1}{k} = \frac{1}{\beta_{\tau+m}} \tag{8}$$

$$\left(\sum_{\nu=0}^{m-1} I_{\tau+\nu}\right)_{\beta_{\tau+m}} = f_k(m|\tau)\cdot m \tag{9}$$

ここに (7)はＴk 年渇水の季節別渇水持続曲線で、ｓは季節早遅の考慮期間、(8)は涸渇許容確率$\beta_{\tau+m}$が与えられた場合、確率年Ｔk としてはその逆数を、また (7)における順序統計量の位数ｋとしては Weibull Plot で非超過確率$\beta_{\tau+m}$を与えるものを用いることを指定している。$\beta_{\tau+m}$が (8)で定義されるものとすれば、等価確定量が (9)で与えられることは当然である。この結果、$\Sigma I_{\tau+\nu}$の非超過確率$\beta_{\tau+m}$の等価確定量として、その (τ-s, τ+s) 間での季節最小値 min$\Sigma I_{\tau+\nu}$の非超過確率$\beta_{\tau+m}$の等価確定量を用いることになるが、これは例えばＴ年確率の洪水ピーク流量が、年最大流量のみを集めた集合についての、超過確率１／Ｔのものを意味するのと同じである。

4．まとめ

ＤＤＣルール・カーブを Chance Constraint Model という一般的数理計画問題として表示することにより、このルール・カーブの持つ欠点、仮定等が明確に議論出来るようになった。その中には① Rigid な放流ルールを用いることに伴う負の貯水量発生の障害、②貯水池の容量がモデル中に表われないため、 infinite reservoir を仮定することになる障害、また③多目的・複数貯水池群への発展の可能性等が含まれる。

参考文献

1) 竹内・富田・伊藤（１９８４）：第２８回水講論文集、ｐｐ．２１－２６

2) 竹内・富田（１９８５）：第１２回土木学会関東支部講演会概要集、ｐｐ．８１－８２

3) ReVelle, Joeres and Kirby （１９６９）： W.R.R. ５（４）、ｐｐ・７６７－７７７