II-7　　大雨の確率分布について

近畿大学理工学部　正員　江藤剛治

1．研究をはじめた理由

大阪の都市河川の治水安全度を評価する過程で以下のような疑問を持った。

① 八尾の雨は何年確率豪雨か？

大阪では 1957 年 6月に未曾有の豪雨があった。大阪・東大阪の南部を中心としてピーク時の時間雨量は 50 ～ 60 mm以上，24 時間雨量は大阪管区気象台で 283.7 mm，八尾では 311.2 mm におよんだ。大阪管区気象台記録の 2位以下が 209.6，188.5，183.2，……，mmであることを考えれば，この雨がいかに記録破りの豪雨であったかがわかる。ガンベル分布，位置母数 bが 0の対数正規分布など，2 母数の確率分布関数で大阪管区気象台の降雨記録を用いて確率評価すると，八尾の記録は2000～2500年確率降雨となる（表－1参照）。ただし基礎資料は1900～1983年 6～10月の大阪管区気象台の時間雨量資料である。以後も同じ。

② 確率分布関数の母数の数を増やして適合度を上げることに意味があるのか？

母数の数を増やせば，確率分布関数形は，観測値から得られる経験的な頻度分布に一致する。たとえば 3 母数の対数正規分布を大阪の 24 時間雨量に適用すると，八尾の記録は 435年確率降雨となって，どうしても無理があるというほどの値ではなくなる。さらに母数の数を増やせばいくらでも適合度を上げることができる。むしろオーバーフィットとなる。この場合データが変われば母数，および最終的に得られる推定値も不安定に変化する可能性が高い。よって資料数に対応した最適なパラメータ数があることが予想される。たとえば 1957 年の雨を除外して3 母数の対数正規分布をあてはめると，八尾の記録は，435 年から 7000 年確率降雨に変わる。一方，2 母数の確率分布関数をあてはめる場合には 1957 年のデータを除いても，確率年にしてたかだか2 倍程度にしか変動しない（表－１参照）。以上より，3 以上の母数の確率分布関数を，確率年が観測年数と同程度になるような，大きな雨量の確率評価に適用することは妥当でないことがわかる。

③ 大阪だけの特異な現象か？

米谷は日本各地の年最大日雨量をガンベル分布を用いて確率評価した。連続する 50 年の年最大日雨量資料から 100年確率日雨量を求める。年度を適当にずらして 100年確率雨量が最大となるような 50 年を選ぶ。このようにして得られた値は本来の 100年確率降雨よりも，はるかに大きな値になっていることは確かである。にもかかわらず，この値と実際に観測された最大日雨量とを比較すると，ほとんどの地点で実測最大日雨量の方がより大きな値となる。すなわち上記①，②に述べた傾向は，全国的に生じているらしい。

2．平方根指数型最大値分布

著者らは一雨の総雨量の確率分布として平方根K分布を提案した。これは以下の仮定のもとに導かれる。

①一雨降雨の継続時間とピーク雨量は独立。②一方が指数分布に，他方はガンマ分布に従う。

③総雨量（の1/2 ）はそれらの積に比例する。

以上はあまり無理のない仮定であるから，平方根K分布が総雨量の頻度分布に良く適合する可能性は高い。ただし平方根K分布の確率密度関数は第２種変型ベッセル関数を含むので，取り扱いに不便である。よってこれを理論的な厳密さはできるかぎり保ちつつ簡便化する。大雨を対象とするとし，第２種変型ベッセル関数の漸近展開公式を使う。このとき，総雨量の確率分布は次の平方根指数分布となる。

密度関数　$h(x) = (\beta/2)\exp(-\sqrt{\beta x})$ (1)，分布関数　$H(x) = 1-(1+\sqrt{\beta x})\exp(-\sqrt{\beta x})$　(2)

大雨の年生起回数はポアソン分布に従い，その年平均生起回数をλとする。このとき年最大一雨総雨量の確率分布関数は，次の「平方根指数型最大値分布」となる。

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0 \text{ のとき}) \\ \exp[-\lambda\{(1+\sqrt{\beta x})\exp(-\sqrt{\beta x})\}] & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (3)$$

式 (3)は，ガンベル分布と大差ない程度に簡便な式である。母数はガンベル分布と同様，λ，βの2 個のみである。ただしはるかに長く裾を引き，これまで予想されていた以上の大雨が生起する可能性が高くなる。

平方根指数型最大値分布は本来年最大一雨総雨量の確率分布関数として導かれたものである。24～48時間雨量はおおむね一雨総雨量と見なせることが多いので，これらの年最大値にに対しても平方根指数型最大値分布が適合する可能性が高い。

一方，式(1) のかわりに指数分布を用いると，最大値分布としてガンベル分布が導かれる。ピーク時間雨量などは指数分布に従うので，年最大時間雨量などに対してはガンベル分布がよく適合すると予想される。

3．実測値へのあてはめによる理論の検証

年最大10分～48時間雨量にガンベル分布，平方根指数型最大値分布をあてはめたものを図－1に示す。

10分～1 時間雨量ではガンベル分布の方が適合度が高い。2 ～48時間雨量では平方根指数型最大値分布の方がはるかに適合度が高い。客観的な適合度の指標である尤度を比較しても同じ結果が得られる。まさに予想どおりの結論である。

平方根指数型最大値分布によれば 1957 年の大阪の 24 時間雨量は 214年確率，八尾の記録は 380年確率，大阪の 48 時間雨量は 80 年確率雨量となって，84年間の資料の中で十分起こりうる雨量となる。

24時間雨量に3 母数対数正規分布（石原・高瀬法），ガンベル分布，平方根指数型最大値分布をあてはめたものを図－2に示す。図中点線は全資料，実線は 1957 年の資料を除いて母数推定した結果による。3 母数対数正規分布による推定は極めて不安定であるが，ガンベル分布，平方根指数型最大値分布による場合は 1957 年のような極端に大きな値が生じたり，除かれたりしても，安定した確率評価ができることがわかる。

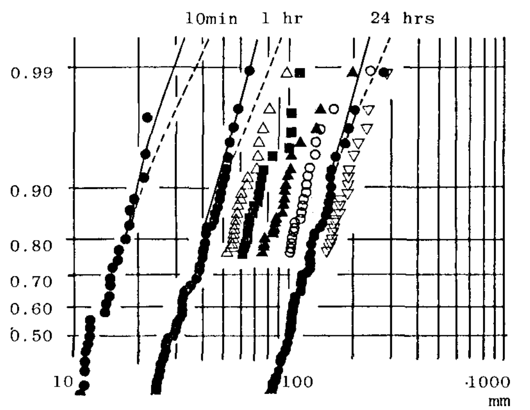
以上より，日程度の時間単位の年最大雨量，一雨総雨量の年最大値の分布などに，平方根指数型最大値分布を用いることの妥当性は明らかであろう。

確率評価主義のかわりに，既往実績主義を用いる場合は，平方根指数型最大値分布を用いて推定された確率雨量に対して，既往最大値の方が小さい流域では，危険側の治水計画を策定することになる。

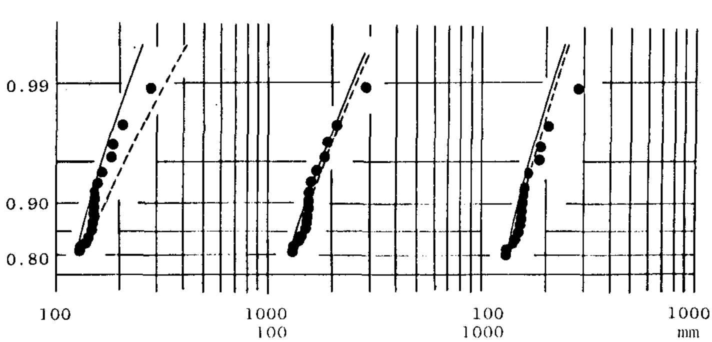
表－1 各種の分布関数による実績雨量の確率評価

(1957 年の年最大 24 時間雨量記録) 単位:(確率) 年
*)平方根指数型年最大値分布
**)3母数対数正規分布は石原・高瀬法による推定
***) 1957 年の記録を除いて推定した値

分布型		資料年数	大阪 283.7mm	八尾 311.2mm
2母数	ガンベル		955	2500
		***	1808	5140
	平方根*)		214	380
		***	351	653
3母数対数正規			268	435
		***	2381	6993



図－1 ガンベル分布（実線），平方根指数型最大値分布（点線）の適合度の比較



図－2 既往最大雨量を除くときの確率評価の安定性(24 時間雨量)

左より，3母数対数正規，平方根指数型最大値，ガンベル分布