II-6　　流出予測における実時間感度分析手法

京都大学工学部　正　員　椎葉充晴
京都大学工学部　正　員　髙棹琢馬

§1．概要

本研究は，パラメタや予測降雨強度が変化した場合に，推定された状態量や流量予測値がどれだけ変化するかを表す"感度行列（ベクトル）"を実時間で提供していく方法を考察するものである。

筆者ら[1]は，すでに，Bierman[2]による UD フィルターと Hermite-Gauss 積分公式を利用する統計的2次近似手法とを結合した実時間流出予測アルゴリズムを提案しているが，このアルゴリズムに少し手を加えるだけで，感度行列を実時間で求めていくことができる。

§2．推定誤差共分散行列の UD 分解と感度行列

非負定値対称行列 P を，対角成分が1の上三角行列 U と非負値対角行列 D を用いて，

$$P = UDU^t \tag{1}$$

の形に表すことを P の UD 分解という。上つき添字の t は行列の転置操作を表す。状態ベクトルの推定値とその推定誤差共分散行列を更新していく Kalman フィルターに対して，Bierman は，推定誤差共分散行列を常に UD 分解した形で保持・更新していく UD フィルターを提案している[2]。このフィルターは数値的安定性の点で優れている。

UD 分解手法を用いると感度分析は容易である。確率ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ c \end{bmatrix}$ の推定値を $\begin{bmatrix} x^\# \\ c^\# \end{bmatrix}$，推定誤差共分散行列の UD 分解を

$$\begin{bmatrix} U_x & U_{xc} \\ 0 & U_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x & U_{xc} \\ 0 & U_c \end{bmatrix}^t \tag{2}$$

と表す。これは，$\begin{bmatrix} x \\ c \end{bmatrix}$ が

$$\begin{bmatrix} x \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^\# \\ c^\# \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_x & U_{xc} \\ 0 & U_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_x \\ \nu_c \end{bmatrix} \tag{3}$$

と表されることと同値である。ただし，ν_x，ν_c は互いに無相関で，平均0，共分散行列が D_x，D_c の確率ベクトルである。この第2行から ν_c を求め，第1行に代入すると，

$$x - x^\# = U_x \nu_x + U_{xc} U_c^{-1} (c - c^\#) \tag{4}$$

を得る。これは，c に関する推定誤差が x に関する推定誤差に及ぼす感応度が，行列 $S_{en} = U_{xc} U_c^{-1}$ で与えられることを示している。U_c は単位上三角行列であるから，U_c^{-1} を計算しなくても，

$$S_{en} U_C = U_{xc} \tag{5}$$

を前進代入によって解けば感度行列 S_{en} が得られる。

§3．降雨予測誤差が流出予測誤差に及ぼす感度の分析への応用

時刻 t の流出システムの状態ベクトルを x(t) と表し，現在時刻 k から将来時刻 k+M までの状態の推移が

$$x(k+j) = A_{k+j-1}\, x(k+j-1) + B_{k+j-1}\, u_k + v_{k+j-1}, \quad j=1,\ldots M \tag{6}$$

と表されるとする。ただし，u_k は時刻kから時刻 k+M までの降雨強度系列を表すベクトル，v_{k+j-1} は $x(k)$ や u_k とは無相関のノイズ，A_{k+j-1}，B_{k+j-1} は係数行列である。$x(k+M)$ を $x(k)$ で表すと，

$$x(k+M) = \underline{A}_M\, x(k) + \underline{B}_M\, u_k + \underline{v}_M \tag{7}$$

の形にかける。$\underline{v}_M$ は $x(k)$ や u_k とは無相関のノイズ，$\underline{A}_M$，$\underline{B}_M$ は係数行列で，特に，$\underline{B}_M$ は

$$\underline{B}_M = B_{k+M-1} + \sum_{p=k}^{k+M-2} (A_{k+M-1}A_{k+M-2}\cdots A_{p+1})B_p \tag{8}$$

と表される。時刻 k+M の流出量 $Q(k+M)$ が

$$Q(k+M) = H_{k+M}\, x(k+M) \tag{9}$$

と表されるとすると（H_{k+M} は係数ベクトル），入力 u_k の流出量 $Q(k+M)$ に対する感度ベクトル S_{en}^* は $H_{k+M}\, \underline{B}_M$ で与えられる。

一方，筆者らは，予測ステップで，$c(t) = u_k$，$t \geqq k$ とおいて，拡大した状態ベクトル $\begin{bmatrix} x(t) \\ c(t) \end{bmatrix}$ の推移を予測していくアルゴリズムを用いている。 このアルゴリズムによって $\begin{bmatrix} x(k+M) \\ c(k+M) \end{bmatrix}$ の予測誤差共分散行列が UD 分解された形で求められているので，§２の議論によって，入力 u_k の流出量 $Q(k+M)$ に対する感度ベクトル S_{en}^* は

$$S_{en}^*\ U_c = H_{k+M}\, U_{xc} \tag{10}$$

を前進代入によって解いて得られ，(8)式によって$\underline{B}_M$ を計算する必要はない。

入力 u_k の予測値を Δu_k だけ変化させたとき，流出量の予測値は $S_{en}^*\ \Delta u_k$ だけ変化するから， シミュレーションによらず， S_{en}^* を求めておけば降雨予測値の変化の影響を直ちに計算できる。

§４．離散時間線形システムへの変換に関する補足[1]

(6)式や(9)式のような離散時間線形モデルで流出システムを直接モデル化するのは希であって，実際は，連続時間非線形系としてモデル化されることが多い。しかし，差分公式を用いて時間を離散化し，非線形関数を線形化すれば，上記の議論を適用できる。

非線形関数の線形化の方法として筆者らは統計的２次近似手法を提案している。n次確率ベクトルxの非線形関数 $f(x)$ の統計的２次近似とは，xが近似的に正規分布 $N(x^{\#},P)$ に従うとして，

$$f(x) \simeq B + H\,(x - x^{\#}) + \delta, \qquad \delta = \frac{1}{2}(x-x^{\#})^t A\,(x-x^{\#}) \tag{11}$$

の形に近似するものである。 ただし，定数 B，n次行ベクトル H，n次対称行列 A は，近似誤差の２乗の期待値が最小になるように定めるものとする。 xの共分散行列 P が UD 分解されていれば，B，H，A を求めるのは比較的容易であり，２次項δの平均値や分散も求められる。２次項δは１次項とは無相関であるから，δを新たに付加するノイズとして扱えば線形の理論が適用できる。

§５．あとがき

本報告で提示した実時間感度分析手法の適用例[3] は講演時に示す。離散的な値をとる未知の定ベクトルを含む場合の感度分析も同様の考え方で展開できる[4]。

1) 高棹琢馬・椎葉充晴・富澤直樹（1984）：統計的二次近似理論を適用した流出予測システムの構成，京大防災研究所年報，第27号 B-2. 2) Bierman, G. J. (1977) : Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation, Academic Press, New York. 3) 中北英一（1985）：豪雨の予知・予測手法とその洪水予測への適用に関する研究，京大修士論文. 4) 富澤直樹（1985）：最尤法を用いた確率過程的流出モデルの同定と流出予測に関する研究，京大修士論文.