II-4　スプライン関数を用いた水文時系列の逆問題

時間単位が大きな時系列から時間単位が小さな時系列の推定

パシフィックコンサルタンツ株式会社　西田 真二
北海道大学工学部　藤田 睦博

1．はじめに

観測システムの出力信号 y から入力信号 x を求める問題を逆問題と呼んでおり、実用上多くの重要な問題を含んでいる。水文時系列に対する一般的な逆問題としては流量から雨量を求める問題、時間単位 T の系列からさらに小時間単位の系列を推定する問題が考えられ、ここでは後者に対する解析に３次スプライン関数を適用した結果を報告する。

2．解析手法

水文時系列の逆問題としては、和の系列 y_i^* が与えられて x_i 系列を推定することになる。今、x_i 系列のサンプルサイズを2Nとし、y_i^* の時間単位を T、x_i の時間単位を $T/2$ とすれば y_i^* 系列および重複和の系列 y_i は次式で示される。

$$\left.\begin{aligned} y_1^* &= x_1 + x_2 \\ y_2^* &= x_3 + x_4 \\ &\vdots \\ y_i^* &= x_{2i-1} + x_{2i} \\ &\vdots \\ y_N^* &= x_{2N-1} + x_{2N} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_2 + x_3 \\ &\vdots \\ y_i &= x_i + x_{i+1} \\ &\vdots \\ y_{2N-1} &= x_{2N-1} + x_{2N} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

すなわち y_i 系列のうち奇数項のみが既知でありN個の条件式が不足している。そこで不足している条件式のうちN-1 個を y_i^* 、y_i 両系列の自己相関係数の構造から補間する。ここで x_i を定常系列と仮定すれば次式が成立する。

$$E\{y\}=E\{y^*\}=2E\{x\} \tag{3}$$

$$Var\{y\}=Var\{y^*\}= Var\{x\}(2\rho_{x,0}+2\rho_{x,1}) \tag{4}$$

$$\rho_{x,\tau} = (E\{x_i x_{i+\tau}\}-E\{x\})/Var\{x\} \tag{5}$$

$$\rho_{y^*,\tau} = (E\{y_i^* y_{i+\tau}^*\}-E\{y^*\})/Var\{y^*\} \tag{6}$$

$$\rho_{y,\tau} = (E\{y_i y_{i+\tau}\}-E\{y\})/Var\{y\} \tag{7}$$

$$\rho_{y^*,\tau} = \rho_{y,2\tau} \tag{8}$$

$\rho_{y^*,\tau}$ から $\rho_{y,\tau}$ の奇数項を補間できれば y_i 系列の未知数である偶数項は $\rho_{y,\tau}$ と線形関係におくことができる。この場合、未知数N-1 個の条件式をそろえられず悪条件となるが最短右側インバース法によって近似解を得ることができる。

$$F \cdot X = Y \tag{9}$$

F：$m \times n$ の係数マトリックス
X：n 元の未知数の列ベクトル
Y：m 元の定数項の列ベクトル

最短解 X° は次式で与えられる。

$$X^\circ = F^T \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot Y = F^\circ \cdot Y \tag{10}$$

y_i 系列の偶数項を X ベクトルとして式(10)により近似解 X° を計算すれば y_i 系列はすべて既知となり、式(2) に再度式(10)を適用すれば x_i 系列の近似解を得ることができる。

しかし、上記の手法による解析は悪条件なため、一般に安定した解が得られない。そこで次式で示される３次スプライン関数を適用した補間法を採用する。

$$\phi(i) = \begin{cases} 0 & (i<0) \\ i^3/24h^4 & (0 \le i \le h) \\ (i^3-4(i-h)^3)/24h^4 & (h \le i \le 2h) \\ (4(i-3h)^3-(i-4h)^3)/24h^4 & (2h \le i \le 3h) \\ -(i-4h)^3/24h^4 & (3h \le i \le 4h) \\ 0 & (4h<i) \end{cases} \tag{11}$$

３次スプライン関数の補間は式(11)で示される３次スプライン関数群に重みをつけた和として表わされ、一般に次式が成立する。

$$x(i) = \sum_{j=1}^{K} \alpha_j \phi_j(i) \tag{12}$$

今、推定しようとする x_i 系列が３次スプライン関数によって補間できると仮定すれば和の系列 y_i^* 、重複和の系列 y_i に対してそれぞれ次式が成立する。

$$y_i^* = \sum_{j=1}^{K} \alpha_j \phi_j(2i-1) + \sum_{j=1}^{K} \alpha_j \phi_j(2i) \tag{13}$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{K} \alpha_j \phi_j(i) + \sum_{j=1}^{K} \alpha_j \phi_j(i+1) \tag{14}$$

式(13)、(14)のいずれかに対して３次スプライン関数の重み α を最小２乗法によって決定すれば x_i 系列を推定することが可能となる。

3．実測の水文資料による計算例

昭和28年 5月 1日から 100日間の神流川における実測日流量より 2日流量を計算し、逆問題によって日流

量を推定した例を以下に示す。

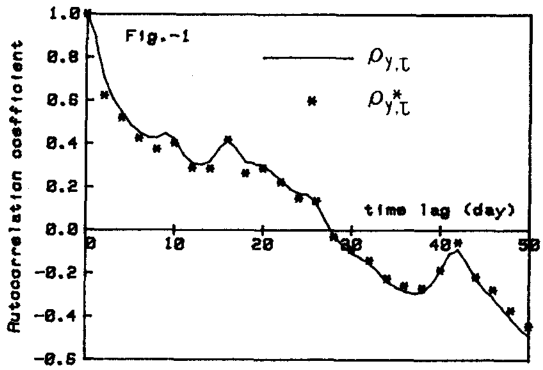
図－１は$\rho^*_{y,\tau}$と$\rho_{y,\tau}$を比較したもので非定常な日流量時系列に対しても式(8) の関係は成立している。そこで$\rho_{y,2i+1}$を$\rho^*_{y,i}$と$\rho^*_{y,i+1}$によって直線式で補間し、最短右側インバース法で求めた$\hat{y}_i$ 系列と実測値から計算したy_i 系列は図－２に示すとおりよく一致している。y_i 系列がすべて求まったので式(2) に再度最短右側インバース法を用いて$\hat{x}_i$ 系列を推定し、実測のx_i 系列と比較すれば図－３に示すとおりであり、その解は発散している。

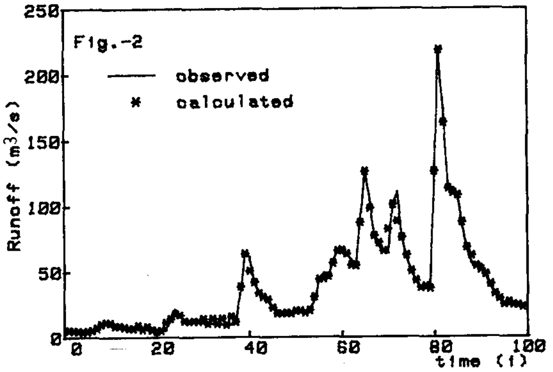
そこで３次スプライン関数による補間を試みる。まず式(13)によってy_i^* 系列からx_i 系列を直接推定する方法を試みたが、これは条件式が少なすぎるため満足な結果が得られなかった。そこで図－２で計算した$\hat{y}_i$ に式(14)を適用し、式(11)で$h=2$として３次スプライン関数による補間結果を示せば図－４の通りである。これによって計算された重みα によってx_i 系列を計算すれば図－５に示されるように、未知数が不足する逆問題としては、多少高周波数成分をカットしてはいるもののほぼその波形を再現しているものと考えられる。

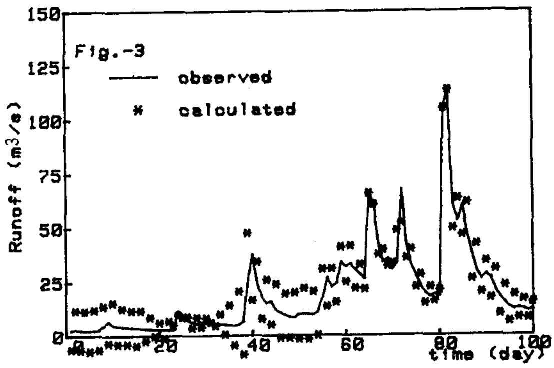
４．あとがき

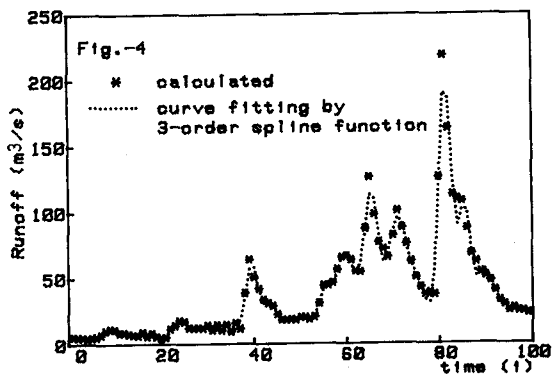
時間単位が大な時系列から時間単位が小な時系列を逆問題として推定する場合、水文時系列においてはその伝達関数が既知なので、自己相関係数の構造から未知数を補間する方法は有効である。さらに３次スプライン関数を適用することによって安定した逆問題の解を得ることが可能となる。

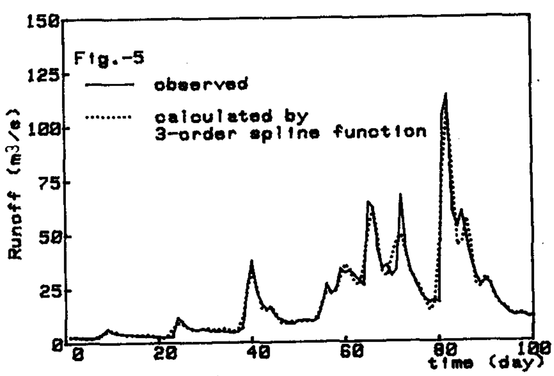
本報告では２分割の例を示したが、本手法によればｎ分割に対しての計算も可能である。











参考文献　1)藤田睦博：水文時系列におけるDetection Process.第19回水理講演会論文集、1975
2)福島英晃、藤田睦博：降雨時系列のDetection Process.第13回自然災害科学総合シンポジウム、1976
3)市田浩三、吉本富士市：スプライン関数とその応用、教育出版、1979